

V: Vektor-Kalkulus

Via

Euklidischer Raum (ER) = Ursprung + Euklidischer Vektorraum
 (Raum unserer Wahrnehmung)

Punkt im ER: $P = O + \vec{r}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

Differenzen v. Punkten sind Vektoren:

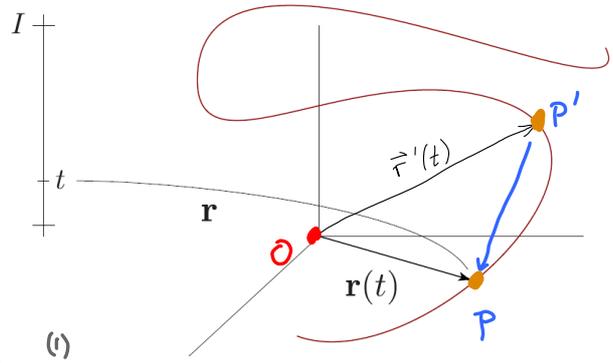
$$\vec{p} - \vec{p}' = \vec{r} - \vec{r}' \in \mathbb{E}^3$$

V1 Kurven

V1.1 Definition einer Kurve in \mathbb{R}^d

$$\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^d(t) \end{pmatrix}$$



Intervall: $I \subset \mathbb{R}$, wir wählen i.d. Regel $I = (0, \tau)$ (2)

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ = Bild der Funktion $\vec{r} = \vec{r}(I)$
 [im Sinne v. Seite L1b]

Die Funktion \vec{r} liefert eine 'Parametrisierung d. Kurve'

Beispiele von Parametrisierungen

V1b

$y(x) = 2x$ eine mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t, 2t)^T, t \in (0, 1)$ (1)

andere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t^2, 2t^2)^T, t \in (0, 1)$ (2)

weitere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (\sin t, 2 \sin t)^T, t \in (0, \frac{\pi}{2})$ (3)

$y(x) = x^2$ eine mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t, t^2)^T, t \in (0, \infty)$ (4)

andere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (e^t, e^{2t})^T, t \in (-\infty, \infty)$ (5)

naheliegende Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T, t \in (0, \pi)$ (6)
 $\phi = t$

naheliegende Parametrisierung: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t, t \in (0, 1)$ (7)

Parametrisierung einer Kurve enthält mehr Information als die Kurve selbst:
 Kurve sagt aus, wie die 'Reiseroute' aussieht.
 Parametrisierung sagt zusätzlich auch aus, wie schnell sie durchlaufen wird.

V1.2 Kurvengeschwindigkeit

'Kurvengeschwindigkeit' $\vec{v}(t)$ z. Zeit $t \in I \in (0, \tau)$
 ist definiert durch die lineare Näherung:

$$\vec{r}(t + \delta_t) \approx \vec{r}(t) + \delta_t \vec{v}(t) \quad (\delta_t \rightarrow 0) \quad (1)$$

$\vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve,

denn eine kleine Änderung, δ_t , in t bewirkt, dass sich \vec{r}
 in \vec{v} -Richtung ändert.

$$\vec{v}(t) \stackrel{(1)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \delta_t) - \vec{r}(t)}{\delta_t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv d_t \vec{r}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \quad (2)$$

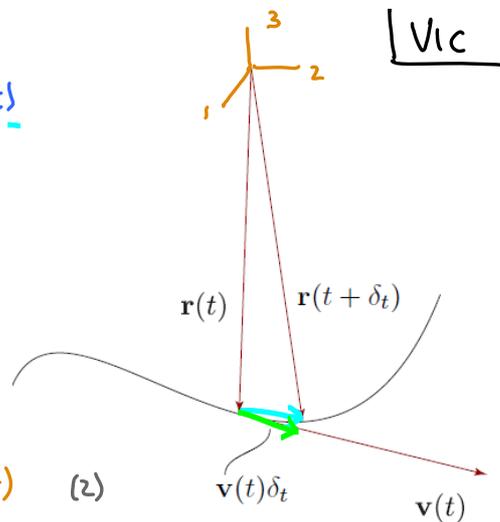
[Vergleiche Mutter aller Ableitungen, C1b.3 !]

$$\text{Komponentenschreibweise: } \dot{\vec{r}}(t) = \dot{e}_i r^i(t) \quad (3)$$

Kartesische Basisvektoren sind zeitunabhängig! $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\dot{e}_i r^i(t)) = \dot{e}_i \left(\frac{dr^i(t)}{dt} \right) \equiv \dot{e}_i v^i(t) \quad (4) \quad v^i(t) \equiv \frac{dr^i(t)}{dt} \equiv \dot{r}^i(t) \quad (5)$$

$$\text{Beschleunigung: } \vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t) \quad (6)$$

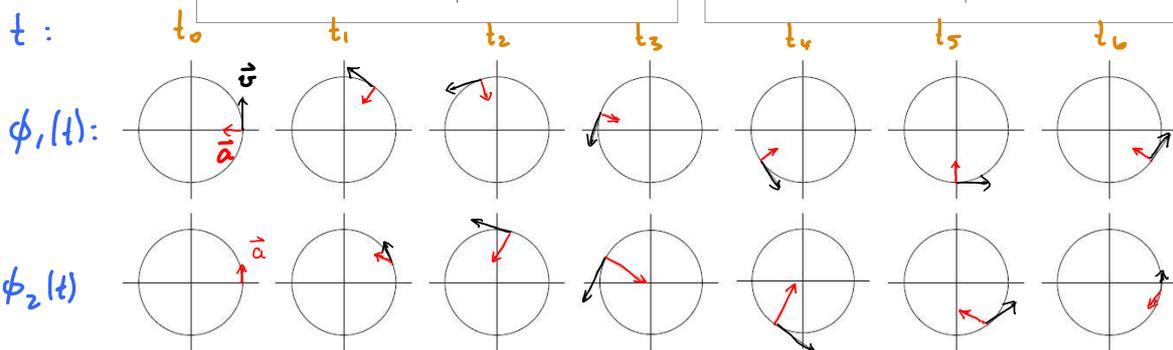
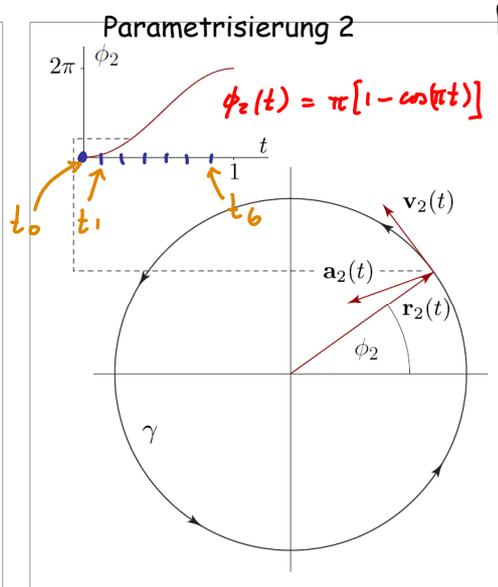
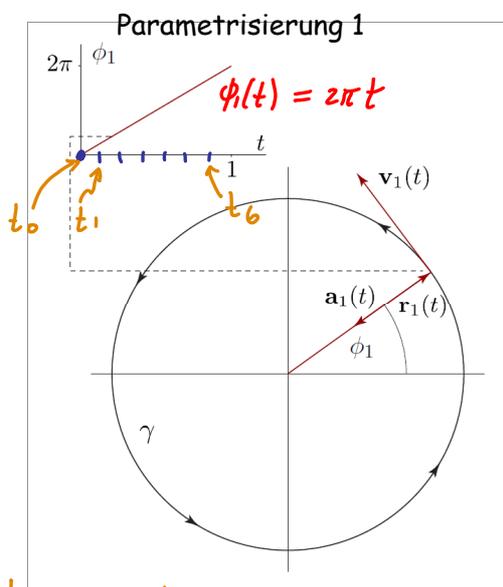


Wir definieren I als offenes (!) Intervall, denn am Rand ist die Ableitung $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ undefiniert.

$$\text{Am Rand: } \dot{\vec{r}}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \dot{\vec{r}}(t)$$

Siehe AD-Buch, INFO auf Seite 409.

Beispiel: Kreis



Vie

Ort: $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i(t) \\ \sin \phi_i(t) \end{pmatrix}$ (1)

Parametrisierung 1

$$\phi_1(t) = 2\pi t \quad (2)$$

Parametrisierung 2

$$\phi_2(t) = \pi [1 - \cos(\pi t)] \quad (3)$$

Beide Parametrisierungen (i = 1,2) beschreiben denselben Kreis:

$$\|\vec{r}_i\|^2 = (x_i)^2 + (y_i)^2 = \cos^2[\] + \sin^2[\] = 1$$

Quadrat
Vektor: i = 1 oder 2

$$\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in (0,1) \}$$

Geschw.: $\dot{\vec{r}}_i = \begin{pmatrix} -\sin \phi_i(t) \\ \cos \phi_i(t) \end{pmatrix} \dot{\phi}_i$, $\dot{\phi}_1(t) = 2\pi$, $\dot{\phi}_2(t) = \pi^2 \sin(\pi t)$ (5)
 $= d_t(i)$

Beschl.: $\ddot{\vec{r}}_i \stackrel{PR}{=} - \begin{pmatrix} \cos \phi_i(t) \\ \sin \phi_i(t) \end{pmatrix} \dot{\phi}_i^2 + \begin{pmatrix} -\sin \phi_i(t) \\ \cos \phi_i(t) \end{pmatrix} \ddot{\phi}_i$, $\ddot{\phi}_1 = 0$, $\ddot{\phi}_2 = \pi^3 \cos(\pi t)$ (6)
 $= d_t(s)$

$$= -\vec{r}_i \dot{\phi}_i^2 + \vec{v}_i \dot{\phi}_i / \dot{\phi}_i \quad (7)$$

Zentripetalbeschl. Änderung der Geschwindigkeit in Tangentialrichtung

Für i = 1 gilt: $\|\vec{r}_1(t)\| = 1$, $\|\vec{v}_1(t)\| = 2\pi$, $\|\vec{a}_1(t)\| = (2\pi)^2$ (8)

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0 \quad (9)$$

Vif

Ableitungsregeln: $d_t \equiv \frac{d}{dt}$ $d_t \vec{r} \equiv d_t(\vec{r}(t))$

Für $\vec{r}(t)$, $\vec{s}(t)$, $a(t)$

gilt:

$$d_t(\vec{r} + \vec{s}) = d_t \vec{r} + d_t \vec{s} \quad (1)$$

$$d_t(a \vec{r}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} (d_t a) \vec{r} + a (d_t \vec{r}) \quad (2)$$

$$d_t(\vec{r} \cdot \vec{s}) \stackrel{PR}{=} (d_t \vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot (d_t \vec{s}) \quad (3)$$

$$d_t(\vec{r} \times \vec{s}) \stackrel{PR}{=} (d_t \vec{r}) \times \vec{s} + \vec{r} \times (d_t \vec{s}) \quad (4)$$

Herleitung:

nach Komponenten zerlegen, z.B.:

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_i r^i(t), \quad \vec{s}(t) = \vec{e}_j s^j(t) \quad (5)$$

$$d_t(\vec{r} \cdot \vec{s}) = d_t[(\vec{e}_i r^i(t)) \cdot (\vec{e}_j s^j(t))] \quad (6)$$

$$\stackrel{PR}{=} (\vec{e}_i d_t(r^i(t))) \cdot (\vec{e}_j s^j(t)) + (\vec{e}_i r^i(t)) \cdot (\vec{e}_j d_t(s^j(t))) \quad (7)$$

$$= (d_t \vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot (d_t \vec{s}) \quad \Rightarrow (4) \quad (8)$$

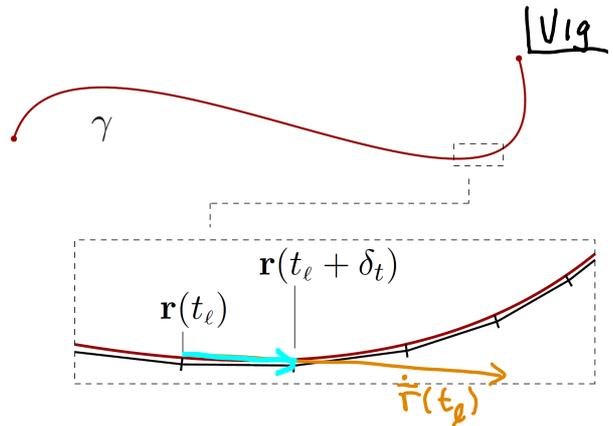
V1.3 Länge einer Kurve

Kurve: $\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t)$

Schätzung der Kurvenlänge:
(mit Diskretisierungsparameter δ_t)

$$L_{\delta_t} = \sum_k \|\vec{r}(t_k + \delta_t) - \vec{r}(t_k)\| \quad (1)$$

(c.1) $\approx \|\delta_t \dot{\vec{r}}(t_k)\| = \delta_t \|\dot{\vec{r}}(t_k)\|$



Tatsächliche Kurvenlänge:

$$L[\gamma] = \lim_{\delta_t \rightarrow 0} L_{\delta_t} \stackrel{(1)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \delta_t \sum_k \|\dot{\vec{r}}(t_k)\| = \int_0^T dt \|\dot{\vec{r}}(t)\| \quad (2)$$

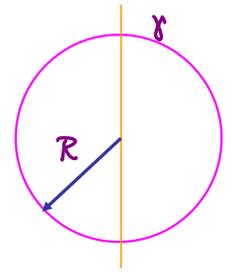
(c.2) $\equiv dt \dot{\vec{r}}(t)$

Beispiel: Umfang eines Kreises:

$$\vec{r}(t) = R (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)^T, \quad t \in (0, 1) \quad (3)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = 2\pi R (-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)^T, \quad \|\dot{\vec{r}}\| = 2\pi R \underbrace{[\sin^2 + \cos^2]^{1/2}}_{=1} \quad (4)$$

$$L[\gamma] \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 dt \ 2\pi R = 2\pi R \quad \checkmark \quad (5)$$



Länge ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve

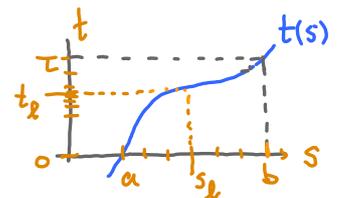
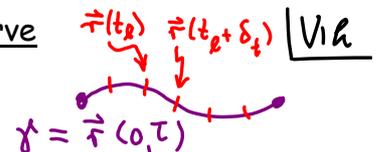
t-Parametrisierung:

$$\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (1)$$

Argument v. $\vec{r}(t)$ sei
Zielelement einer
bijektiven Abbildung:

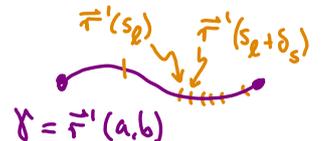
$$t : (a, b) \rightarrow (0, T), s \mapsto t(s) \quad (2)$$

$$\text{wegen Bijektivität: } \frac{dt}{ds} > 0 \quad (3)$$



Konstruiere nun alternative Parametrisierung derselben Kurve:

s-Parametrisierung: $\vec{r}' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d, s \mapsto \vec{r}'(s) \equiv \vec{r}(t(s)) \quad (4)$



s-Geschwindigkeit:

(Id.2): \mathbb{R}^d

$$\|d_s \vec{r}'(s)\| \stackrel{(4)}{=} \left\| \frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) \right\| = \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \Big|_{t=t(s)} \frac{dt(s)}{ds} \right\| = \frac{dt(s)}{ds} \|d_t \vec{r}(t(s))\| \quad (5)$$

$\| \tilde{u} a \| = a \| \tilde{u} \| \text{ falls } a > 0$

Kurvenlänge:

$$L[\gamma] \stackrel{(4,2)}{=} \int_a^b ds \|d_s \vec{r}'(s)\| \stackrel{(5)}{=} \int_a^b ds \frac{dt(s)}{ds} \|d_t \vec{r}(t(s))\| \stackrel{(c2g.4)}{=} \int_{t=t(s)}^T dt \|d_t \vec{r}(t)\| \stackrel{\checkmark}{=} \stackrel{(3)}{=} \stackrel{(2)}{=} L[\gamma] \quad (6)$$

Integralsubstitution: $t = t(s)$

Konsistenzcheck erfolgreich: s-Parametrisierung liefert dieselbe Länge wie t-Parametrisierung!

Natürliche Parametrisierung einer Kurve: durch Bogenlänge

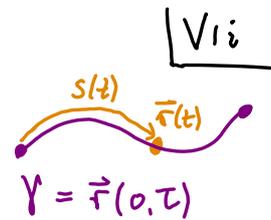
Kurve sei durch eine Variable u parametrisiert.

$$\vec{r}: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \vec{r}(u) \quad (1)$$

Bogenlänge nach Zeit t :

$$s(t) \equiv \int_0^t du \, \|d_u \vec{r}(u)\| \quad (2)$$

(auch unabhängig v. Form der Parametrisierung)



s wächst monoton mit t :

$$s: (0, T) \rightarrow (0, L(\gamma)), \quad t \mapsto s(t), \quad d_t s(t) > 0 \quad (3)$$

Umkehrfunktion: Zeit $t(s)$, nach der Länge s erreicht ist:

$$t: (0, L(\gamma)) \rightarrow (0, T), \quad s \mapsto t(s) \quad (4)$$

Parametrisiere nun Kurve durch Bogenlänge s :

$$\vec{r}_L: (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s)) \quad (5)$$

'Natürliche Parametrisierung'

Geschw. in nat. Param.:

$$\|d_s \vec{r}_L(s)\| \stackrel{(h.s)}{=} \left\| \frac{d \vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=t(s)} \frac{dt(s)}{ds} = \left\| \frac{d \vec{r}}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} = 1 \quad (6)$$

Ist t -Geschw. groß, wächst auch Bogenlänge schnell mit t , 'das hebt sich weg'

sauber formuliert:

$$\frac{dt(s)}{ds} \stackrel{(i.e.z)}{=} \frac{1}{\frac{ds(t)}{dt} \Big|_{t=t(s)}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\|d_t \vec{r}(t)\| \Big|_{t=t(s)}} \quad (7)$$

Beispiel: Kreisbewegung

Bahnkurve:

$$\vec{r}: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)^T \quad (1)$$

Periode: wenn

$$\cos(\omega T) = 1 \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

Geschwindigkeit:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{(1)}{=} \omega R (-\sin \omega t, \cos \omega t)^T \quad \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| \stackrel{(3)}{=} R\omega \quad (3)$$

Bogenlänge:

$$s(t) \stackrel{(i.z)}{=} \int_0^t du \, \|\dot{\vec{r}}(u)\| \stackrel{(4)}{=} \int_0^t du \, R\omega = R\omega t \quad (4)$$

Kreisumfang:

$$s(T) \stackrel{(5),(2)}{=} R\omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R \quad \checkmark \quad (5)$$

Umkehrfunktion:

$$t: (0, 2\pi R) \rightarrow (0, T), \quad s \mapsto t(s) = \frac{s}{R\omega} \quad (6)$$

$$\hat{L} = t(2\pi R) = \frac{2\pi R}{R\omega} = T$$

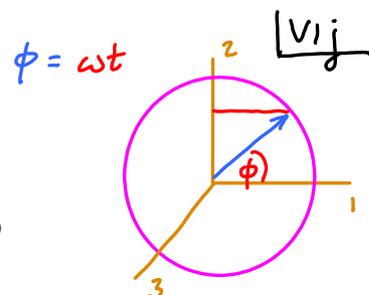
Natürliche

Parametrisierung:

$$\vec{r}_L(s) = \vec{r}(t(s)) \stackrel{(1),(6)}{=} \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)^T \quad (7)$$

s -Geschwindigkeit:

$$\|d_s \vec{r}_L\| \stackrel{(7)}{=} \left\| R \left(-\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, \frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \right) \right\| = 1 \quad \checkmark \quad (8)$$



V1.4 Linienintegral

Vik

Physikalische Motivation: Arbeit (W) verrichtet durch Kraft entlang eines Weges.

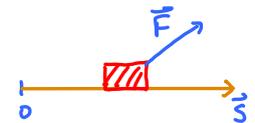
Falls Richtung der Kraft entlang geradliniger Verschiebung ist:

$$W = s F$$



Falls Richtung der Kraft nicht entlang geradliniger Verschiebung:

$$W = \vec{s} \cdot \vec{F}$$

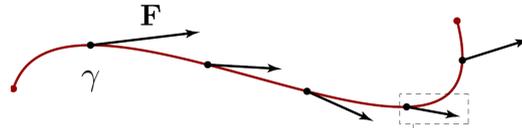


Nicht-geradliniger Weg,

γ

mit ortsabhängige Kraft:

$$\vec{F}(\vec{r}(t))$$



Parametrisierung:

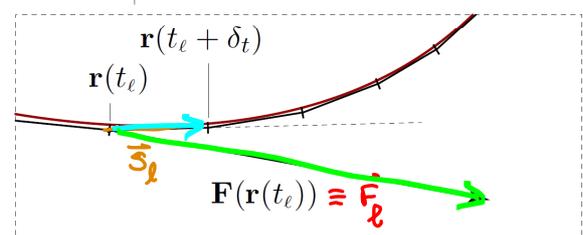
$$\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (1)$$

Diskretisierungsparameter:

$$\delta_t$$

Arbeit im Intervall ℓ :

$$W_\ell \equiv \vec{s}_\ell \cdot \vec{F}_\ell \quad (2)$$



Verschiebung im Intervall ℓ :

$$\vec{s}_\ell = \vec{r}(t_\ell + \delta_t) - \vec{r}(t_\ell) \stackrel{(c.1)}{=} \delta_t \dot{\vec{r}}(t_\ell) \quad (3)$$

Gesamtarbeit entlang der Kurve γ :

Vie

$$W[\gamma] \equiv \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_\ell W_\ell \quad (1)$$

mit dieser symbolische Notation ist dies gemeint!

$$\stackrel{(k.2), (k.3)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_\ell \delta_t \dot{\vec{r}}(t_\ell) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t_\ell)) \equiv \int_0^T dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \equiv \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (2)$$

'Linienintegral der Kraft \vec{F} entlang des Weges γ '

Definition eines allgemeinen Linienintegrals: (3 Konstruktionsschritte)

$$\vec{f} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r}) \quad \text{sei eine vektorwertige Funktion, definiert auf einer Kurve } \gamma \quad (3)$$

(i) Definiere Parametrisierung v. γ :

$$\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (4)$$

(ii) Bilde die reell-wertige Funktion

$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \equiv \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} \quad (5)$$

(iii) Integriere über Definitionsbereich des Parameters:

$$\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^T dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} \quad (6)$$

wird auf 'Wegelement' projiziert

Der Wert des Linienintegrals ist unabhängig von der Parametrisierung (analog zu Seite i)

Beispiel: Berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$

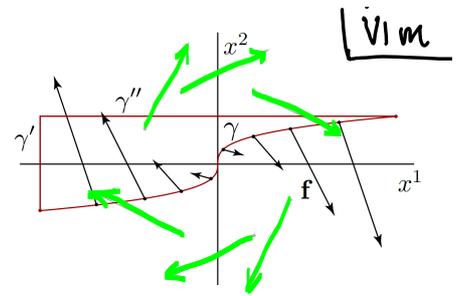
für Weg γ : $\vec{r}(t) = \overset{x(t)}{t^3} \vec{e}_x + \overset{y(t)}{2t} \vec{e}_y, t \in (-1, 1)$ (1)

und Funktion $\vec{f}(\vec{r}) = \underset{f_x(\vec{r})}{y} \vec{e}_x + \underset{f_y(\vec{r})}{(-x)} \vec{e}_y$ (2)

Was heißt das explizit?

Wegparametrisierung: $\vec{r}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t \end{pmatrix}$ (3)

Vektorwertige Funktion: $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{r}) \\ f_y(\vec{r}) \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ (4)



$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f}(\vec{r}(t)) \stackrel{(4)}{=} \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{pmatrix} 2t \\ -t^3 \end{pmatrix}$ (5)

$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \stackrel{(5)}{=} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -t^3 \end{pmatrix} = 6t^3 - 2t^3 = 4t^3$ (6)

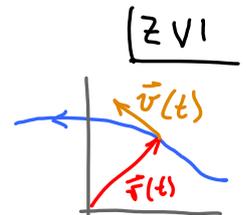
$\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \stackrel{(6)}{=} \int_{-1}^1 dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = \int_{-1}^1 dt 4t^3 = t^4 \Big|_{-1}^1 = 0$ (7)

Durch Windstrudel verrichtete Arbeit entlang ist = 0, denn Wind weht 'mal von

Arbeit entlang $\gamma' \cup \gamma$ ist $\neq 0$

Zusammenfassung V1: Kurven

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ wobei $\vec{r}: I = (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $t \mapsto \vec{r}(t)$



Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \vec{e}_j \cdot x_j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_j \cdot \dot{x}_j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \equiv \int_0^t du \|\dot{\vec{r}}(u)\|$ $\gamma = \vec{r}(0, \tau)$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge: $\vec{r}_L: (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^d, s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s)), \|\frac{d}{ds} \vec{r}_L(s)\| = 1$

Für Vektorfeld: $\vec{f}: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r})$
 (vektorwertige Funktion von \vec{r})

Linienintegral: $\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^\tau dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges