

# Stoffplan

1. Methoden der Physik
2. Kinematik des Massenpunkts
3. Newtonsche Mechanik
4. zentrales Kraftfeld
5. Bewegte Bezugssysteme
6. Spezielle Relativitätstheorie
7. Systeme von Massenpunkten
8. Bewegung starrer Körper
9. Harmonischer Oszillator
10. Elastizitätslehre, Festkörper
11. Flüssigkeiten und Fluide
12. Gase
13. Nichtlineare Dynamik und Chaos

# 1. Methoden der Physik

## • Theorie

Reduktion der Wirklichkeit

z.B. Körper  $\longrightarrow$  Massenpunkt

Näherungen

ignorieren irrelevanter Phänomene

## • Experiment

reproduzierbar

quantitativ

Angabe des Meßfehlers!

$$\text{Phys. Größe} = [\text{Maßzahl} \pm \text{Unsicherheit}] \cdot \text{Maßeinheit}$$

Basisgrößen:	Länge	Zeit	Masse
Basiseinheiten:	m	s	kg
Symbol:	L, x, r...	T, t	M, m

Abgeleitete Größen  $[ \dots ]$  : Dimension von

$$[\text{Geschwindigkeit}] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{m}{s}$$

$$[\text{Volumen}] = [L^3] = m^3$$

$$[\text{Dichte}] = \frac{[M]}{[L^3]} = \frac{kg}{m^3}$$

Raten von Modellen / Formeln durch Dimensionsanalyse:

z.B. Fallzeit:  $T_F \sim h^\alpha M^\beta g^\gamma \quad \neq f(\text{Mondphase, ...})$

$\uparrow$              $\uparrow$              $\uparrow$   
 Höhe        Masse        Erdbeschleunigung

$$\Rightarrow [h^\alpha M^\beta g^\gamma] = m^\alpha kg^\beta \left(\frac{m}{s^2}\right)^\gamma \stackrel{!}{=} s$$

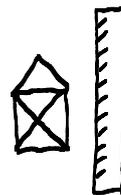
$$\Rightarrow \beta = 0 \quad \alpha + \gamma = 0 \quad \gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} t_F = \text{const.} \sqrt{\frac{h}{g}} \quad \text{Kein Beweis!} \quad \text{später: const.} = \sqrt{2}$$

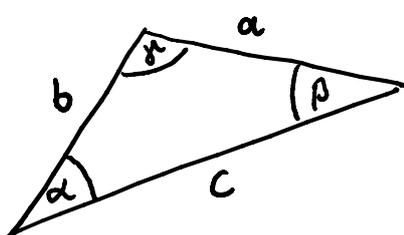
$\swarrow$  unabhängig von M

— Längenmessungen

Messen = Vergleichen



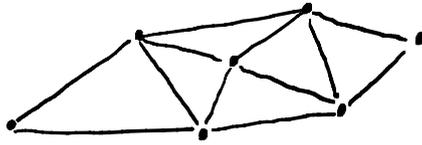
• größere Distanzen / Flächen: Triangulierung



Sinussatz:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

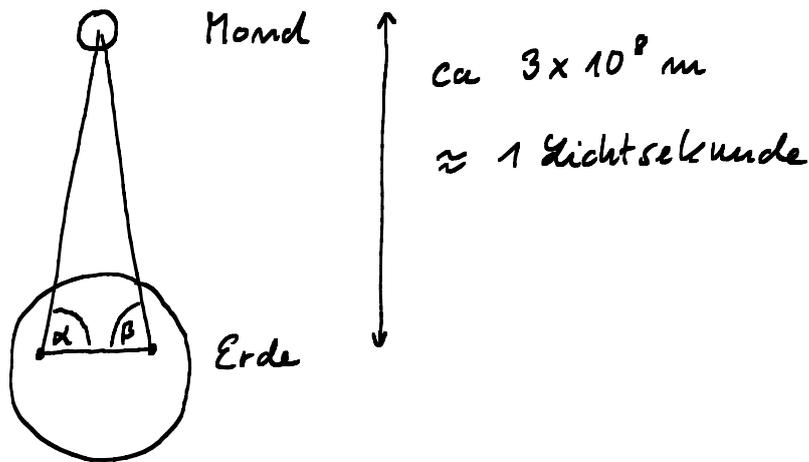
# Zerlegung in Dreiecke



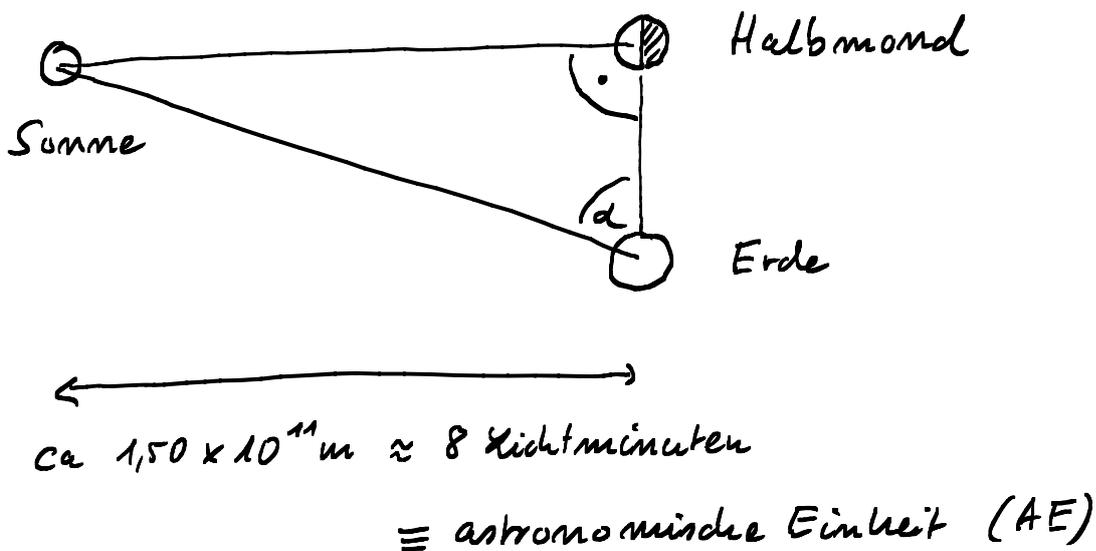
eine Länge, ansonsten nur Winkel messen.

- Beispiele:

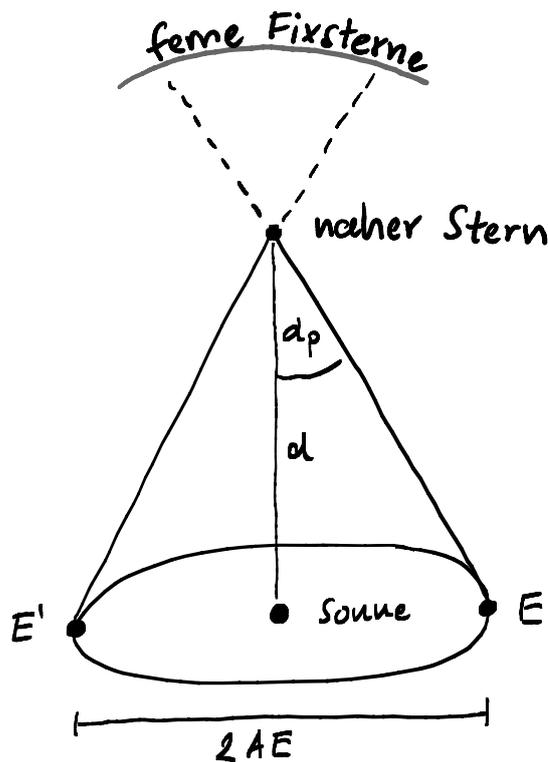
i) Erde - Mond



ii) Erde - Sonne



### iii) Erde - Stern



$\alpha_p = \text{Parallaxenwinkel}$

$$d = \frac{AE}{\tan(\alpha_p)}$$

$$1 \text{ Parallaxensekunde (Parsec)} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m (3,26 Lj)}$$
$$\approx 2 \times 10^5 \text{ AE}$$

Proxima Centauri: 1,3 pc

- Atomare Längenskala:

$$1 \text{ Fermi} = 10^{-15} \text{ m (} \approx \text{ Kern durchmesser)}$$

$$1 \text{ \AA ngström} = 10^{-10} \text{ m (} \approx \text{ Atom durchmesser)}$$

# SI-Bezeichnungen für Größenordnungen

$10^{-3}$ milli	$10^3$ kilo
$10^{-6}$ mikro	$10^6$ mega
$10^{-9}$ nano	$10^9$ giga
$10^{-12}$ pico	$10^{12}$ tera
$10^{-15}$ femto	$10^{15}$ peta
$10^{-18}$ atto	$10^{18}$ exa

- Längenmessungen auf der "Mensch-Skala"

1889 "Armeter"

$$1 \text{ Meter} = \frac{1}{10\,000\,000} \text{ des Erdquadranten}$$



1960 1 Meter = 1 650 763,73 x Wellenlänge  
einer  $^{86}\text{Kr}$  Linie bei  $\lambda = 605,8 \text{ nm}$

seit 1983 Festlegung über die Lichtgeschwindigkeit  
und die SI Sekunde

$$c \equiv 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{exakt}$$

$$\Rightarrow L = c \Delta t$$

Kürzere Distanzen mit Interferometer:

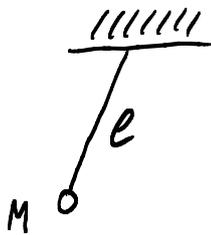
$$L = n\lambda = n \frac{c}{f} \quad f = \text{Frequenz des Lichts}$$

- Zeitmessung:

periodische Vorgänge  $\rightarrow$  Zeitintervalle

1 Tag = 86 400 Sekunden

Sekundenpendel:  $\frac{T}{2} = 1 \text{ s}$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

50. Breitengrad:  $l = 0,994 \text{ m}$

Stimmgabel  $10^{-3} \text{ s}$

Quartzuhr  $10^{-7} \text{ s}$

Cs Atomuhr  $10^{-10} \text{ s}$

Optische Atomuhr  $10^{-15} \text{ s}$

- SI Sekunde:

seit 1967:  $1 \text{ s} \equiv 9\,192\,631\,770$  Schwingungen

des  $^{133}\text{Cs}$   $F=3 \rightarrow F=4$  Grundzustand

Hyperfeinübergang

## — Statistische Unsicherheit

Messreihe:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$

$$\Rightarrow \text{Mittelwert } \bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_n x_n$$

Abweichung vom Mittelwert  $d_n \equiv x_n - \bar{x}$

$$\text{Mittlere Abweichung } \langle d \rangle = \frac{1}{N} \sum_n (x_n - \bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_n x_n - \frac{1}{N} \sum_n \bar{x} = 0$$

Kein gutes Maß, besser  $\frac{1}{N} \sum_n |x_n - \bar{x}|$

aber nicht gut für Berechnungen

Besser:

$$\text{Standardabweichung } \sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_n (x_n - \bar{x})^2}$$

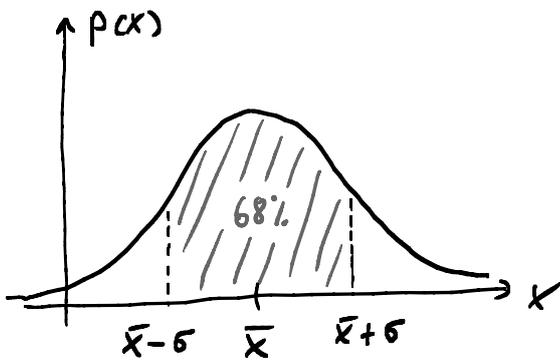
- $\sigma^2$  = "Varianz" = mittlere quadratische Abweichung
- $N-1$  statt  $N$  weil  $\bar{x}$  aus Messreihe (Demtröder)  
unwichtig für  $N \rightarrow \infty$

Die meisten Messreihen sind "Normalverteilt"

$$\text{Normalverteilung } p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$$

Wahrscheinlichkeit  $x$  in  $(x, x+dx)$   
zu messen

$$\text{Normierung } \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$



— Standardabweichung des Mittelwerts

$$\text{Varianz}(\bar{x}) = \left\langle \left( \underbrace{\frac{1}{N} \sum_n x_n}_{\text{Mittelwert einer Messreihe}} - \bar{x} \right)^2 \right\rangle$$

Mittelung über viele Messreihen

globaler Mittelwert aller Messreihen

$$= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_n (x_n - \bar{x}) \sum_{n'} (x_{n'} - \bar{x}) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_n (x_n - \bar{x})^2 \right\rangle$$

Terme  $n=n'$   
+  
Terme  $n \neq n'$

$$+ \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_n \sum_{n' \neq n} (x_n - \bar{x})(x_{n'} - \bar{x}) \right\rangle$$

→ 0 für unkorrelierte Messreihen

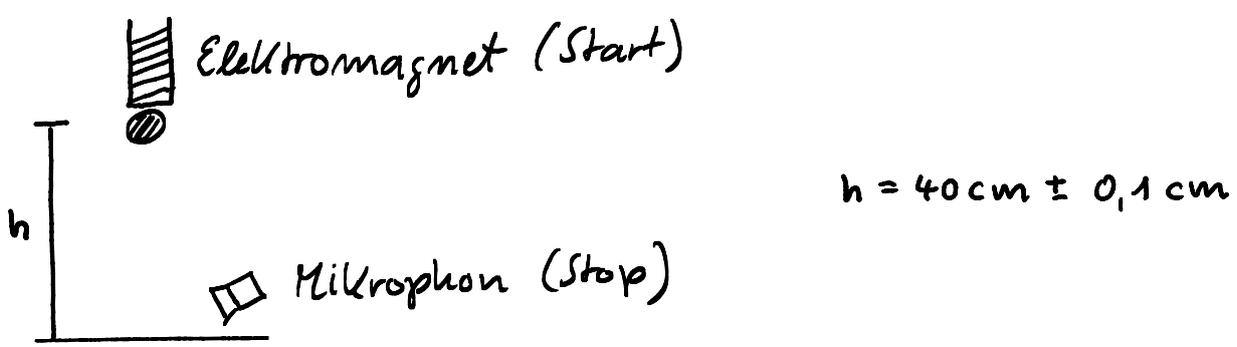
$$= \frac{\langle G^2 \rangle}{N} = \frac{G^2}{N}$$

Messreihen äquivalent  
(gleiche Varianz)

Standardabweichung des Mittelwerts  $\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_n (x_n - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$

• Skalierung:  $\sum_n (x_n - \bar{x})^2 \sim N \Rightarrow \Delta \bar{x} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

Fall experiment:



$t_F = (0,2921s; 0,2920s; 0,2921s; 0,2896s; 0,2916s)$

$\Rightarrow \bar{t}_F = 0,29148s \pm 0,00048s = 0,29148(48)s$

• Vertrauensbereich (Konfidenzintervall)  $\text{Erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$

$P(|x - \bar{x}| < \delta) = \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} p(x) dx = \text{Erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,682689\dots$

$\Rightarrow$  68% der Ereignisse innerhalb  $\pm \delta$  um  $\bar{x}$

• auch 68% der Mittelwerte innerhalb  $\pm \Delta \bar{x}$  um  $\bar{x}$

andere Konfidenzintervalle:

$$P(|X - \bar{x}| < 2\sigma) = \text{Erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 95,45\%$$

$$P(|X - \bar{x}| < 3\sigma) = \text{Erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 99,73\%$$

$$P(|X - \bar{x}| < \delta) \stackrel{!}{=} 95\%, (99\%) \quad \text{"95/99\% Konfidenzintervall"}$$

$$\Rightarrow \delta = 1,960\sigma \quad (\delta = 2,576\sigma)$$

analog für den Mittelwert.

— Rechnen mit Verteilungen (nicht nur Normalverteilung)

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

$$\text{diskret: } \bar{x} = \sum_n x_n p_n$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx$$

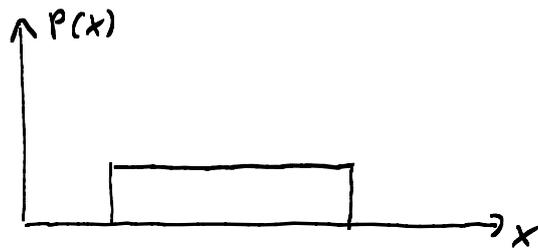
$$\text{diskret: } \sigma^2 = \sum_n (x_n - \bar{x})^2 p_n$$

$$\sigma^2 = \sum_n x_n^2 p_n - 2\bar{x} \underbrace{\sum_n x_n p_n}_{=\bar{x}} + \bar{x}^2 \underbrace{\sum_n p_n}_{=1} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

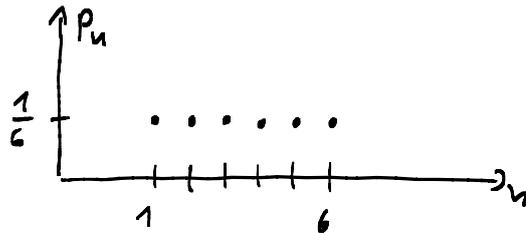
↑ auch für  $p(x)$

- andere Verteilungen

i) Gleichverteilung



z. B. Würfel  $p_n = \frac{1}{6}$  für  $n = 1 \dots 6$



ii) Poisson Verteilung

immer bei zählbaren und unabhängigen Ereignissen  $n$

$P_n = 0$  für  $n < 0$

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad \Rightarrow \quad \sum_n n p_n = \dots = \bar{n}$$

siehe Wikipedia

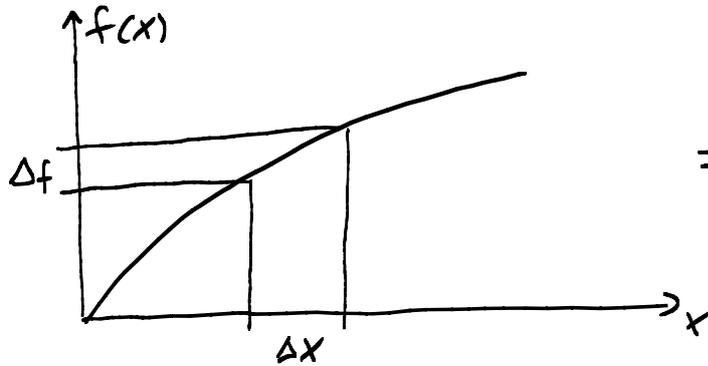
$$\sigma^2 = \sum_n (n - \bar{n})^2 p_n = \dots = \bar{n}$$

Varianz = Mittelwert  $\sigma = \sqrt{\bar{n}} \quad \Delta \bar{n} = \sqrt{\frac{\bar{n}}{N}}$

Normalverteilung mit  $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$  für  $\bar{n} \rightarrow \infty$

- Fehlerfortpflanzung

$\Delta f$  aus  $\Delta x$  falls  $f = f(x)$ :



$$\Rightarrow \Delta f = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta x$$

- Abhängigkeit von mehreren Größen

$f(u, v, \dots)$

$$\Rightarrow \Delta f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \sigma_u^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \sigma_v^2 + \dots}$$

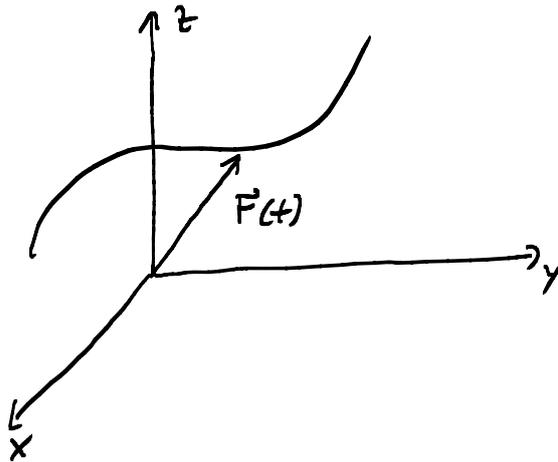
Statistisch unabhängige Fehler addieren sich quadratisch:  
Summe der Varianzen

↖ Beweis in Übungsaufgabe 4

## 2. Kinematik des Massenpunktes

$$\text{Ortskoordinate: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Bahnkurve: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

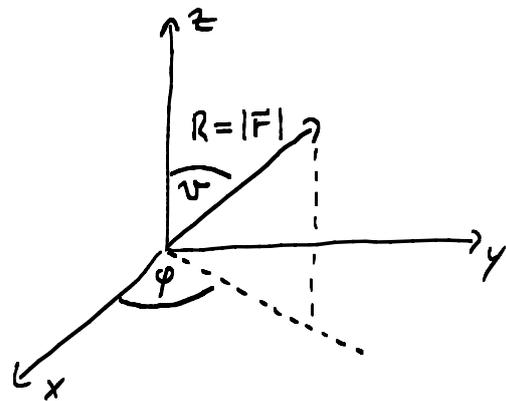


- andere Koordinatensysteme:

- Kugelkoordinaten  $(R, \vartheta, \varphi)$

$\varphi$  in  $(x, y)$  Ebene

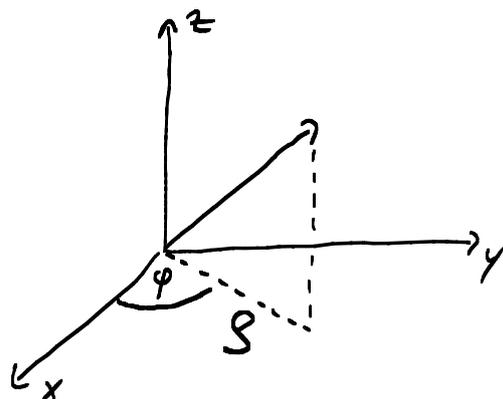
$\vartheta$  Winkel zur  $z$ -Achse



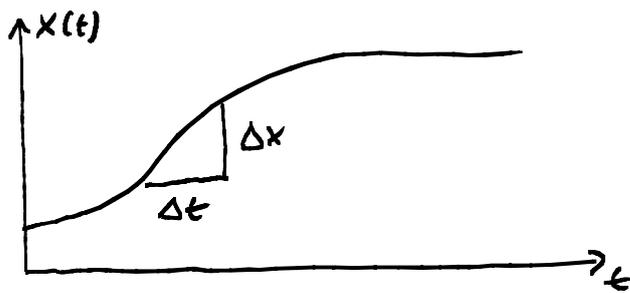
- Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$

$\varphi$  in  $(x, y)$  Ebene

$\rho$  Abstand zur  $z$ -Achse



Zunächst Beschränkung auf eine Raumdimension:

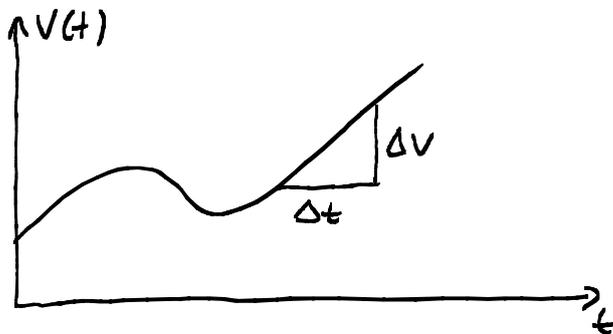


Durchschnittsgeschwindigkeit:  $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Momentan geschwindigkeit:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

- Beschleunigte Bewegung



Durchschnitts beschleunigung:  $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Momentan beschleunigung:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

- gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$a(t) = a_0 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = a_0 t + \text{const}$$

$$v(t=0) = \text{const} \equiv v_0$$

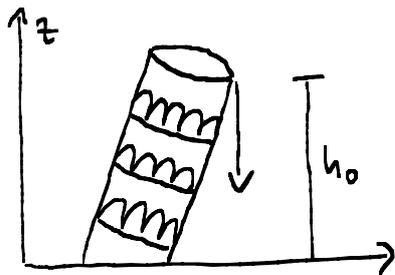
$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + \text{const}'$$

$$x(t=0) = \text{const}' \equiv x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0}$$

- Der freie Fall

Experimente zeigen eine konstante Beschleunigung  $a_z = -g$



$$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0 \quad (v_0 = 0)$$

$$\Rightarrow v_z(t) = -g t$$

$$\text{Fallzeit: } z(t_F) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{t_F = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

Bestimmung der Erdbeschleunigung aus Fallexperiment:

$$\bar{g} = \frac{2\bar{h}}{\bar{t}_F^2} = \frac{2 \times 0,4 \text{ m}}{(0,29148 \text{ s})^2} = 9,416130423 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

↑  
nicht alle Stellen sind signifikant!

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h} \Big|_{\bar{h}}\right)^2 \Delta \bar{h}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t_F} \Big|_{\bar{t}_F}\right)^2 \Delta \bar{t}_F^2}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $\frac{2}{t_F^2}$   $0,1 \text{ cm}$   $-\frac{4h}{t_F^3}$   $0,00048 \text{ s}$

$$= 0,039 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \bar{g} = 9,416(39) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Literaturwert:  $g = 9,807439(1) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

10 $\sigma$  Diskrepanz!  $p = 1 - \text{Erf}\left(\frac{10}{2}\right) = 1,5 \times 10^{-23}$ !

$\Rightarrow$  Systematischer Fehler in mindestens einer der beiden Werte! (hier Lenz, Video)

Systematische Unsicherheit

= Messfehler der sich nicht zu Null mittelt.

Bessere Apparatur:

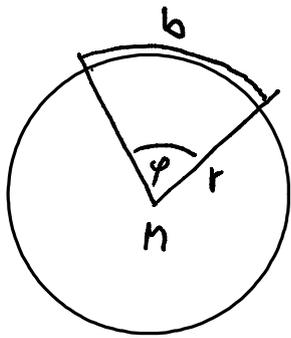
Messung:  $h = 42,5 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$

$t_F = (0,2936 \text{ s}; 0,2934 \text{ s}; 0,2936 \text{ s}; 0,2934 \text{ s}; 0,2936 \text{ s}; 0,2934 \text{ s})$

$\Rightarrow \bar{t}_F = 0,29350(45) \text{ s}$

$\Rightarrow \bar{g} = 9,867(23) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  (2,6  $\sigma$  zum Literaturwert)

## - Rotationsbewegungen



Winkel Einheit:

$$\text{Grad: Vollkreis} = 360^\circ$$

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

$$\text{Bogenmaß: } \varphi = \frac{b}{r} \quad [\varphi] = \text{rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296\dots$$

## - Winkelgeschwindigkeit

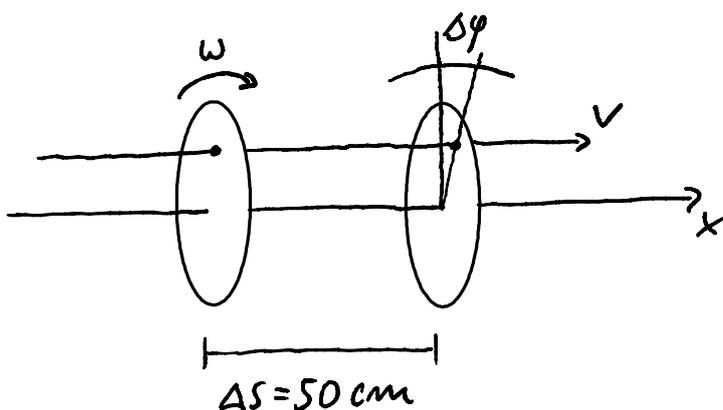
$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f = \text{Frequenz} = \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Sekunde}} \quad [f] = \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$$

$$T = \text{Umlaufzeit} = \frac{1}{f}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Geschwindigkeit:



$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 25 \text{ Hz} \quad \Delta \varphi = 17^\circ$$

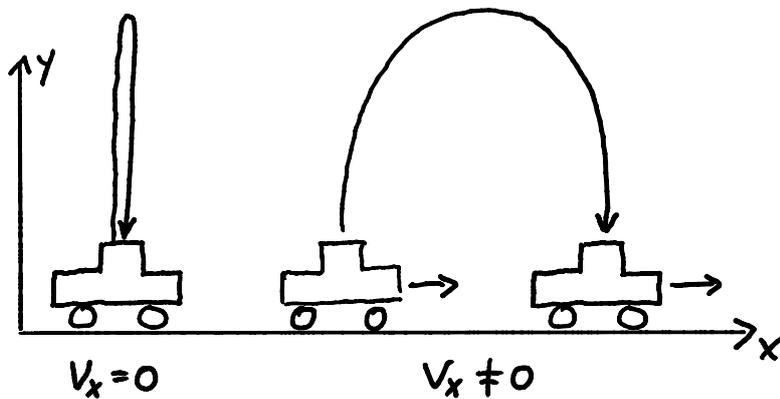
$$\Delta \varphi = \omega \Delta t \frac{360^\circ}{2\pi} = 360^\circ f \Delta t$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \varphi} \Delta s f = 265 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

- Superpositionsprinzip (Newtonsches Relativitätsprinzip)



x und y Richtung können unabhängig voneinander beschrieben werden.

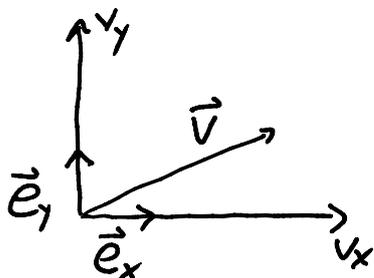
$$v_x = \text{const} \quad \Rightarrow \quad x = v_{0x} t + x_0$$

$$v_y = -gt + v_{0y} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0$$

$$\text{Wähle } x_0 = y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = v_{0x} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x} \quad \text{Wurfparabel}$$

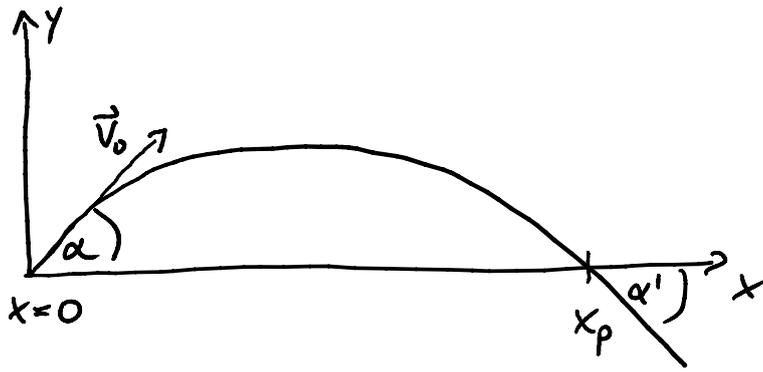
Geschwindigkeiten werden vektoriell behandelt



$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$$

↑                    ↑  
Einheitsvektoren

## - Der schräge Wurf



Wähle:

$$x(t=0) = 0$$

$$y(t=0) = 0$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \quad v_0 \equiv |\vec{v}_0|$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) t \\ v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

freier Fall = vertikale Beschleunigung mit  $g$

Auftreffpunkt  $x_p$

$$t_y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow t_p = \frac{2v_0}{g} \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{2v_0^2}{g} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$(2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha)$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

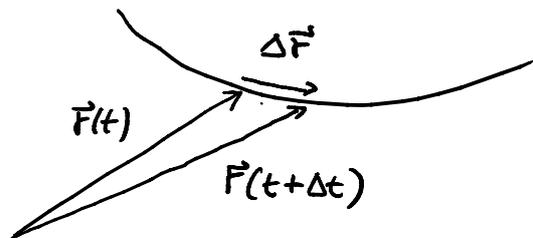
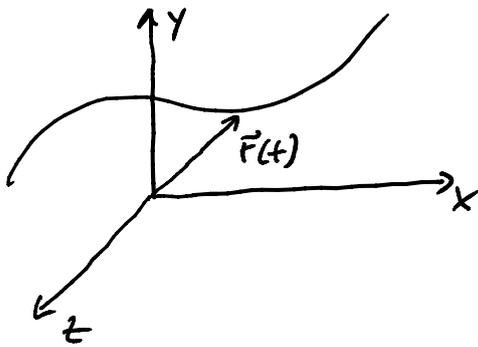
$x_p$  maximal bei  $\alpha = 45^\circ$

Auftreffwinkel  $\alpha'$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha') &= \frac{v_y(t_p)}{v_x(t_p)} = \frac{v_0 \sin(\alpha) - g \left( \frac{2v_0}{g} \sin(\alpha) \right)}{v_0 \cos(\alpha)} \\ &= -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha) = \tan(-\alpha)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\alpha'$$

- Krummlinige Bewegung



• Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad \text{entlang } \Delta \vec{r}$$

$\Rightarrow$  stets tangential zur Bahnkurve

$$\vec{v}(t) = v \vec{e}_t$$

$\vec{e}_t$  = tangentialer Einheitsvektor, zeitabhängig

z.B. durch  $\vec{e}_t = \frac{\vec{v}(t)}{v}$  normiert und  $\parallel$  zu  $\vec{v}(t)$ .

• Beschleunigung

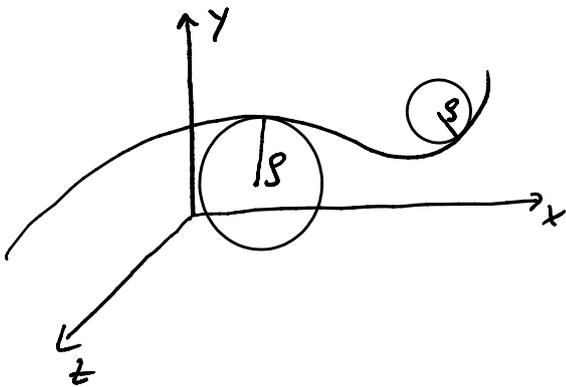
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} \perp \vec{e}_t \quad (\text{Länge konstant, kann sich nur drehen})$$

$$\equiv \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Tangential- und Normalbeschleunigung

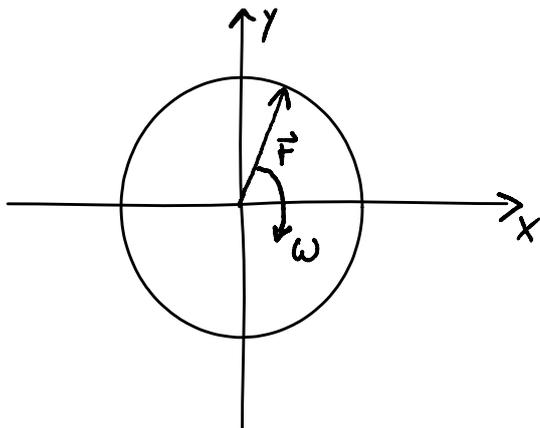
Jede krummlinige Bahn kann lokal durch einen Kreisbogen mit Radius  $\rho$  repräsentiert werden:



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

Beweis, gleich

• Beispiel Kreisbewegung



Bahngeschwindigkeit ( $\omega = \text{const}$ )

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi r \omega}{2\pi} = r\omega$$

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \equiv r \vec{e}_r \quad \text{mit } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

radialer Einheitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

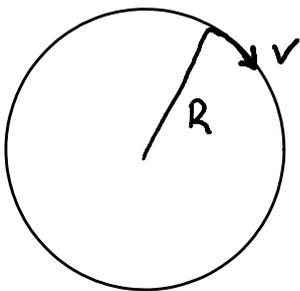
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = -r\omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

$$(\vec{e}_r \hat{=} \vec{e}_n, r \hat{=} \rho)$$

$$\vec{a}_z \equiv -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

Zentripetalbeschleunigung

• Erdsatellit



$$\text{Erdbeschleunigung: } \vec{g} = -g \vec{e}_r \stackrel{!}{=} -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{Rg} = 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

↑  
Erdradius  $R = 6380 \text{ km}$

### 3. Newtonsche Mechanik

#### Die Newtonschen Axiome (1687)

##### 1. Trägheitsprinzip

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung solange keine Kraft auf ihm wirkt.

Besser: Impuls  $\vec{p} \equiv m \vec{v}$

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

##### 2. Aktionsprinzip

Ursache für eine Änderung des Bewegungszustands ist eine Kraft. Sie wird definiert als

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

für  $m = \text{const}$  folgt

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$[F] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{N}$$

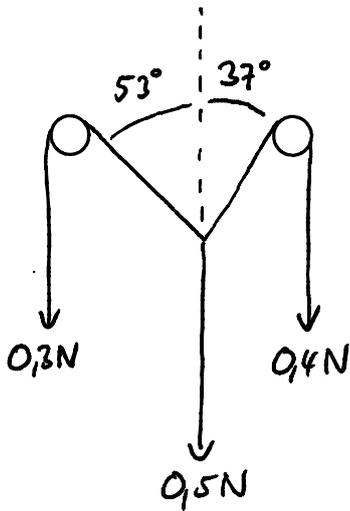
daraus die gesamte  
klassische Mechanik!

##### 3. Reaktionsprinzip

Die Kraftwirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich groß und von entgegengesetzter Richtung. (actio = reactio)

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} \quad \begin{array}{l} \text{(Erde zieht Apfel an)} \\ \text{(Apfel zieht Erde an)} \end{array}$$

- Kräfte addieren sich vektoriell, Komponente weise



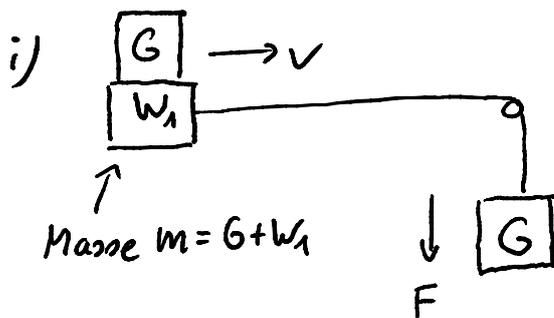
Vertikal:

$$0,4 \text{ N} \cos(37^\circ) + 0,3 \text{ N} \cos(53^\circ) = 0,5 \text{ N}$$

horizontal:

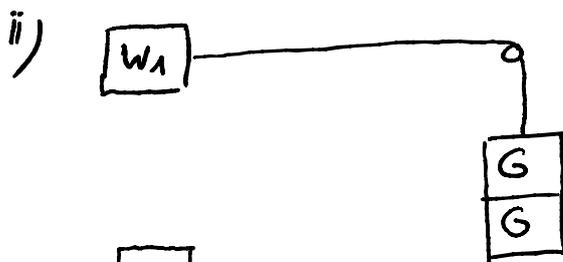
$$0,4 \text{ N} \sin(37^\circ) - 0,3 \text{ N} \sin(53^\circ) = 0$$

Verifikation von  $F = ma$  auf Luftschiene: ( $G = 10 \text{ g}$ ,  $w_1 = 280 \text{ g}$ ,  $w_2 = 300 \text{ g}$ )



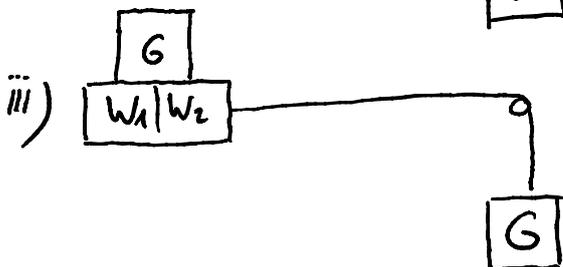
$$\underline{\underline{m_1 = w_1 + 2G}}$$

$$F = Gg = 0,1 \text{ N}$$



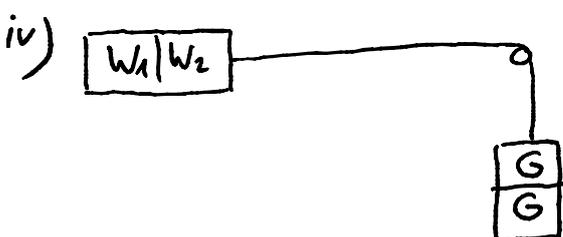
$$\underline{\underline{m_1 = w_1 + 2G}}$$

$$F = 2Gg = \underline{\underline{0,2 \text{ N}}}$$



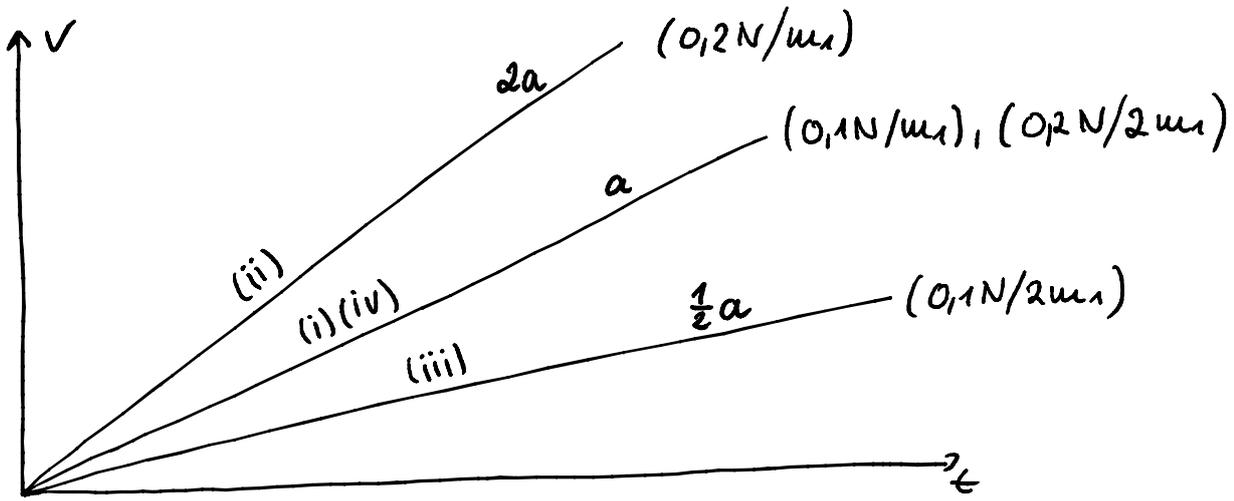
$$m_2 = w_1 + w_2 + 2G = \underline{\underline{2m_1}}$$

$$F = Gg = \underline{\underline{0,1 \text{ N}}}$$



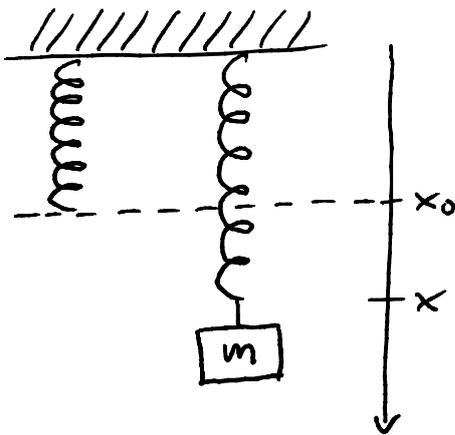
$$m_2 = w_1 + w_2 + 2G = \underline{\underline{2m_1}}$$

$$F = 2Gg = \underline{\underline{0,2 \text{ N}}}$$



$\Rightarrow a \sim \frac{F}{m} \Rightarrow$  Definition:  $F = m_t a$ ; träge Masse  $m_t$

- Kraftmessung durch Verformung



Dehnung = Maß für die Kraft

Verformung  $\rightarrow$  elektrische Kräfte  
zwischen Atomen

empirisch:  $F = -D(x - x_0)$  Hook'sches Gesetz

$D =$  Federkonstante

genauer:  $F = -D(x - x_0) + D_2(x - x_0)^2 + D_3(x - x_0)^3 + \dots$  (Taylor)

meist klein gegen 1. Term

## - Schwere und träge Masse

- träge Masse  $m_t$  = widersetzt sich einer Beschleunigung
- schwere Masse  $m_s$  = wird von anderen schweren Massen angezogen.

Es gibt keinen bekannten Grund warum diese beiden Eigenschaften in Relation stehen!

Gewicht

$$F_s = m_s g$$

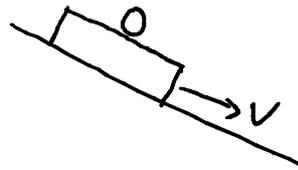
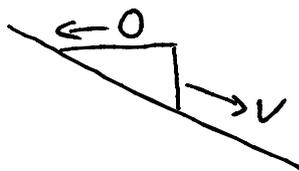
Beschleunigung

$$F_a = m_t a$$

Test: freier Fall

$$F_s = F_a \Rightarrow a = \frac{m_s}{m_t} g$$

i) schiefe Ebene



$$\Rightarrow \frac{m_s}{m_t} = 1$$

ii) Kugel und Feder in evakuiertes Röhre

$$\text{ebenfalls } \frac{m_s}{m_t} = 1$$

empirisch: alle Körper fallen gleich schnell

$$\frac{m_s}{m_t} = \text{const} \quad \text{mit relativer Genauigkeit } 10^{-13}$$

↑ heißt: hängt nicht vom Körper ab.

⇒ Erhebung zum Prinzip:  $m_t = m_s$ ; ab jetzt nur noch "u".

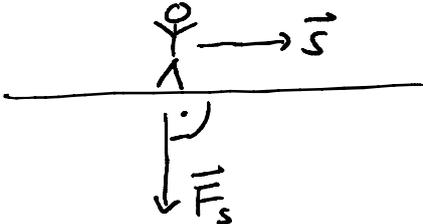
"Äquivalenzprinzip:

Spezielle Relativitätstheorie + Äquivalenzprinzip  
= Allgemeine Relativitätstheorie

- Erhaltungssätze (sehr mächtig)

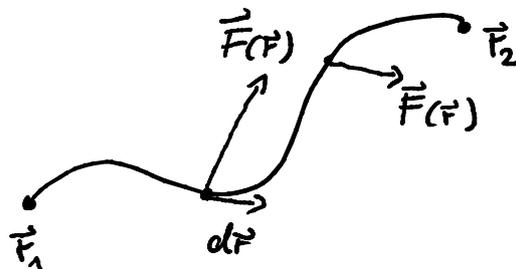
Definition: Arbeit (Energie)  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$      $\vec{s}$  = Strecke

Einheit:  $[W] = [F][s] = \text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \text{Joule (J)}$

Beispiel:   $\vec{F} \perp \vec{s} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 0$

• Kraftfeld:  $\vec{F}(\vec{r})$  ordnet jedem Punkt im Raum  $\vec{r}$  eine Kraft zu

• Krummlinige Wege:



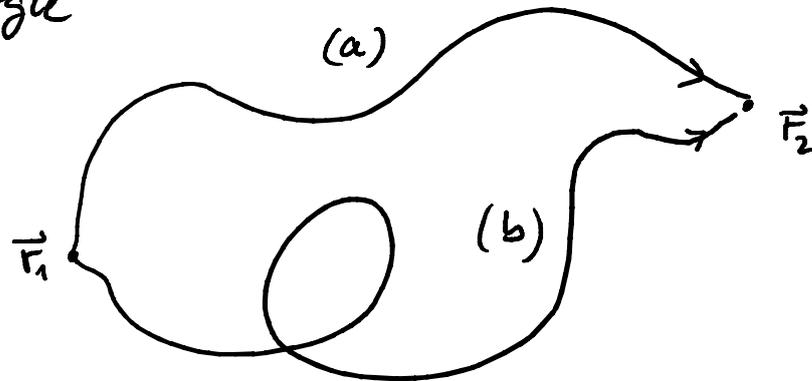
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Wegintegral über die Kraft

$\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{v}$ ,  $W > 0$  für frei werdende Energie

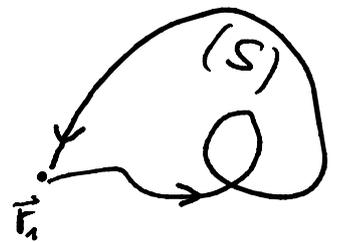
$\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{v}$ ,  $W < 0$  für aufzuwendende Energie

- Potentielle Energie



$$\begin{aligned} W_a - W_b &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}_a) \cdot d\vec{r}_a - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}_b) \cdot d\vec{r}_b \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}_a) \cdot d\vec{r}_a + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}_b) \cdot d\vec{r}_b \equiv \oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

$\oint_S$  Integral über geschlossenen Pfad S



Definition: Konservatives Kraftfeld:

$$\oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \text{ für jeden geschlossenen Pfad } S$$

Kein Energieverlust/Gewinn entlang S

$\Rightarrow$

Konservatives Kraftfeld erhält Energie

- Kraftfelder nicht konservativ z.B. durch:  
Zeitabhängigkeit, Reibung, bestimmte Funktionen  $\vec{F}(\vec{r})$
- Konservative Kraftfelder können durch ein Potential beschrieben werden:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \equiv - (E_{\text{pot}}(\vec{r}) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_0)) = -E_{\text{pot}}(\vec{r}) + \text{const.}$$

frei wählbare additive Konstante

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\Delta W \text{ (anderes Vorzeichen)}$$

- Potentialgradient

$$1 \text{ Dimensional: } \Delta E_{\text{pot}}(x) = E_{\text{pot}}(x + \Delta x) - E_{\text{pot}}(x)$$

$$\approx E_{\text{pot}}(x) + \frac{\partial E_{\text{pot}}(x)}{\partial x} \Delta x - E_{\text{pot}}(x)$$

$$= \frac{\partial E_{\text{pot}}(x)}{\partial x} \Delta x \Rightarrow \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} = -F_x$$

$$3 \text{ Dimensional: } \Delta E_{\text{pot}}(\vec{r}) \approx \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \Delta z$$

$$\Rightarrow dE_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Definition:

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Nabla Operator

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r})}$$

(auch aus  $\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$  und Stokes'scher Satz)

- Beispiele

i) Gravitation  $\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_0^z \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^z mg dz = mgz$$

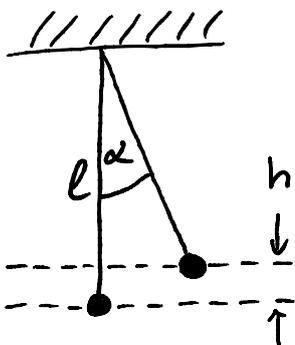
$\overset{z}{\underbrace{\phantom{0}}}$   $\overset{0}{\underbrace{\phantom{0}}}$   
 ← willkürlich

$$\boxed{E_{\text{pot}}(z) = mgz}$$

$$\text{Umgekehrt: } \vec{F}_G = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(z) = - \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} mgz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

ii) Feder  $F = -D(x-x_0) \Leftrightarrow E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D(x-x_0)^2$

iii) Pendel



$$E_{\text{pot}} = mgh = mgl - mgl \cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \dots$$

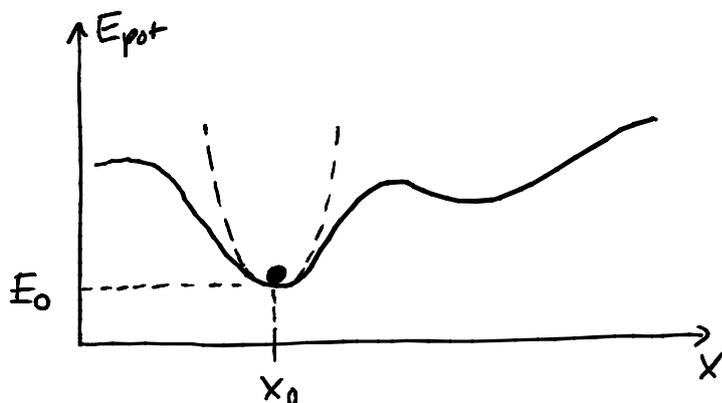
$$\approx \frac{1}{2} mgl \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow F = - \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial \alpha} = -mgl \alpha$$

(dies ist eine "Kraft" im Winkelraum ( $\alpha$  Einheiten (cos))  
 statt im Ortsraum  $[x] = m$ . Trotzdem  $F = m\ddot{\alpha}$ )

$\vec{F}$  und  $E_{\text{pot}}$  äquivalent,  $E_{\text{pot}}$  meist einfacher

- Potentialminimum



$$E_{\text{pot}} = E_0 + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} (x-x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial x^2} (x-x_0)^2 + \dots$$

↑                    ↑  
irrelevant        verschwindet

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial x^2} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \text{stabiles Gleichgewicht}$$

quadratisches Potential  $\Leftrightarrow$  lineare Kraft

beliebte Näherung

- Kinetische Energie

$$\begin{aligned} -\Delta E_{\text{pot}} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{v} \cdot d\vec{r}}{dt} \\ &= m \int_{\vec{v}(\vec{r}_1)}^{\vec{v}(\vec{r}_2)} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2} (\vec{v}^2(\vec{r}_2) - \vec{v}^2(\vec{r}_1)) \equiv \Delta E_{\text{kin}} \end{aligned}$$

$$E_{\text{kin}} \equiv \frac{m}{2} v^2 \quad \text{kinetische Energie}$$

(additive Konstante, abhängig vom Bezugssystem)

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}} \quad \text{Energieerhaltung im konservativen Kraftfeld}$$

- Beschleunigungsarbeit im homogenen Kraftfeld:

$$W = Fx = (ma) \left( \frac{1}{2} at^2 \right) = \frac{m}{2} (at)^2 = \frac{m}{2} v^2$$

- Freier Körper: Austausch  $E_{\text{pot}} \leftrightarrow E_{\text{kin}}$

- nicht-konservative Kräfte, Dissipation, Reibung

$$\boxed{E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{Diss}} = \text{const}} \quad (\text{kein Beweis})$$

$$E_{\text{Diss}} = \text{Reibungsverluste (Wärme)}$$

oft schwer zu quantifizieren, daher Energieerhaltung schlecht anwendbar.

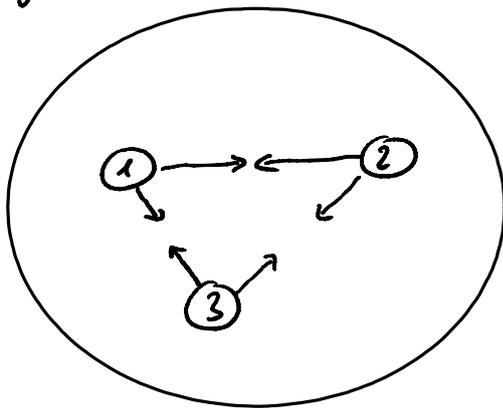
- Leistung

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{r}(t')) \cdot \vec{v}(\vec{r}(t')) dt' = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \text{Watt}$$

# - Impulserhaltung

abgeschlossenes System



← keine äußeren Kräfte

$$\text{actio} = \text{reactio} : \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}}_{=0} + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij} = 0}$$

im abgeschlossenen System

$i \neq j$  keine Kraft auf sich selbst.

$$\vec{p}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \dots = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}$$

↑ alle außer  $i$

$$\text{Gesamtimpuls } \vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

$$\dot{\vec{p}}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\text{ges}} = \text{const}}$$

Impulserhaltungssatz  
(sehr mächtig)

falls äußere Kräfte wirken:

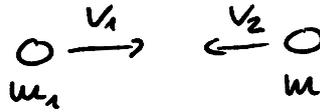
$$\dot{\vec{p}}_{\text{ges}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

$\Rightarrow$  das System kann wie ein Massenpunkt behandelt werden

– Stoßgesetze, ohne Potential (nur  $E_{\text{kin}}$ )

eindimensional:

Vor dem Stoß:



nach dem Stoß:



1.) Elastischer Stoß, keine Reibungsverluste

Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Erhaltung der kinetischen Energie:

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2$$

2 Unbekannte ( $v_1'$ ,  $v_2'$ ) + 2 Gleichungen:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

(selbst nachrechnen!)

## 2.) Inelastischer Stoß

- Impulserhaltung gilt unverändert.
- Energieerhaltung gilt ebenfalls, aber nicht für die kinetische Energie!
- $\Delta E_{\text{kin}}$  meist schwer zugänglich, außer in Spezialfällen:

### 2a) Vollkommen inelastischer Stoß

Stoßpartner "kleben" zusammen:  $v_1' = v_2'$

Beispiele:

i) elastischer Stoß mit  $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow v_1' = v_2 \quad v_2' = v_1$$

Stoßpartner tauschen Geschwindigkeit aus.

ii) elastischer Stoß mit  $v_2 = 0, m_2 = \infty$

$$\Rightarrow v_1' = -v_1 \quad v_2' = 0 \quad \text{Reflexion}$$

Stoß gegen eine Wand

iii) elastischer Stoß mit  $m_1 = 2m_2, v_2 = 0$

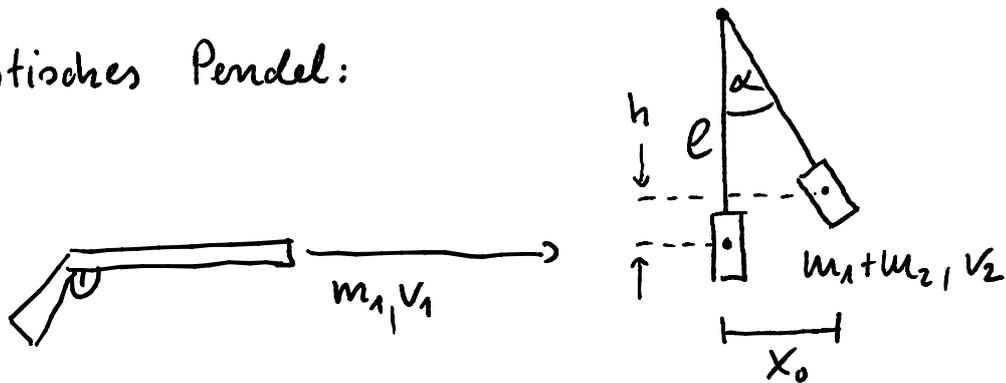
$$\Rightarrow v_1' = \frac{1}{3} v_1 \quad v_2' = \frac{4}{3} v_1$$

iv) vollkommen inelastischer Stoß mit  $v_2 = 0$ ,  $v_1' = v_2'$

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2) v_2'$$

$$\text{z.B. } m_1 = m_2 \Rightarrow v_1' = v_2' = \frac{1}{2} v_1$$

Ballistisches Pendel:



gemessen:  $x_0 = 17 \text{ cm}$ ,  $m_1 = 2,7 \text{ g}$ ,  $m_2 = 4040 \text{ g}$ ,  $l = 7,5 \text{ m}$

Energieerhaltung ( $E_{\text{kin}}$ ,  $E_{\text{pot}}$  des Pendels):

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2'^2 \stackrel{!}{=} (m_1 + m_2) g h = (m_1 + m_2) g l (1 - \cos \alpha)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{x_0}{e}\right) = 1,3$$

$$\Rightarrow v_2' = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)} = v_1' = 0,19 \text{ m/s}$$

Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2'$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)} = 291 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

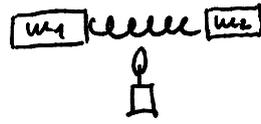
$$\underline{\text{und}} \Delta E_{\text{Diss}} = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v_1'^2$$

$$= 114,320 \text{ J} - 0,076 \text{ J} = 114,243 \text{ J}$$

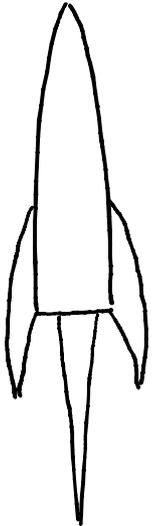
↑  
fast alles!

V) Superelastischer Stoß:  $\Delta E_{\text{Diss}} < 0$ ,  $v_1 = v_2 = 0$

$$\Rightarrow m_1 v_1' = -m_2 v_2'$$



- Raketenantrieb



$v, m$  = Geschwindigkeit und Masse der Rakete

$$\Delta p_R = (m - \Delta m) \Delta v$$

$w$  = Treibstoffgeschwindigkeit

$$\Delta p_w = -w \Delta m$$

Rakete + Treibstoff = ein Massenpunkt

Impulsänderung:  $\frac{\Delta p_R}{\Delta t} + \frac{\Delta p_w}{\Delta t} = F_{\text{ext}} = -mg$  (im freien Fall)

$$\dot{p}_{\text{ges}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{m \Delta v}{\Delta t} - \underbrace{\frac{\Delta m \Delta v}{\Delta t}}_{\rightarrow 0} - w \frac{\Delta m}{\Delta t} \right)$$

$\Delta m > 0$   
aber  $\frac{dm}{dt} < 0$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} + w \frac{dm}{dt} = -mg$$

Raketengleichung

$$/ \times \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow dv = -w \frac{dm}{m} - g dt \quad (\text{Variablentrennung})$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_{\text{end}}} dv = -w \int_{m_0}^{m_{\text{end}}} \frac{dm}{m} - g \int_0^{T_{\text{end}}} dt$$

$T_{\text{end}} = \text{Brennschluß}, m_{\text{end}} = m(t=T_{\text{end}})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{\text{end}} &= -w [\ln(m_{\text{end}}) - \ln(m_0)] - g T_{\text{end}} + v_0 \\ &= w \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{end}}}\right) - g T_{\text{end}} + v_0 \end{aligned}$$

Beispiel: Saturn V

$$m_0 = 3 \times 10^6 \text{ kg}; m_{\text{end}} = 7 \times 10^5 \text{ kg}; w = 2,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}; T_{\text{end}} = 150 \text{ s}; v_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_{\text{end}} = 2200 \frac{\text{m}}{\text{s}} < \text{niedrigster Satellitenorbit } 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

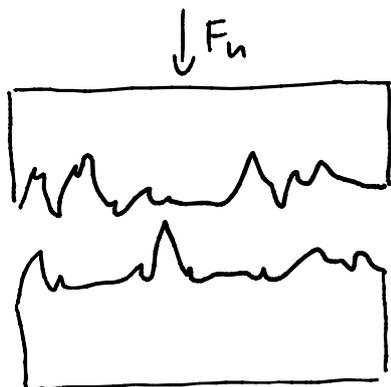
$\Rightarrow$  mehrstufige Rakete

$$2. \text{ Stufe: } v_{\text{end}} = 8435 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 3. \text{ Stufe: } v_{\text{end}} = 15 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\text{Fluchtgeschwindigkeit } 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- Reibung

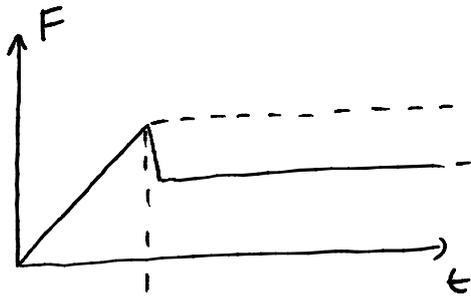
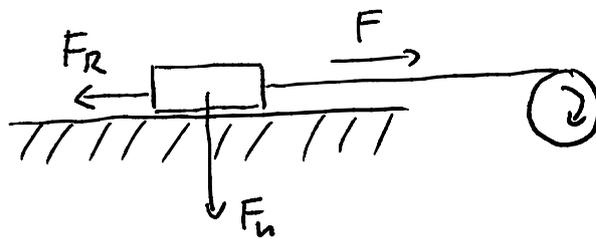
mikroskopisch durch Oberflächenrauigkeit:



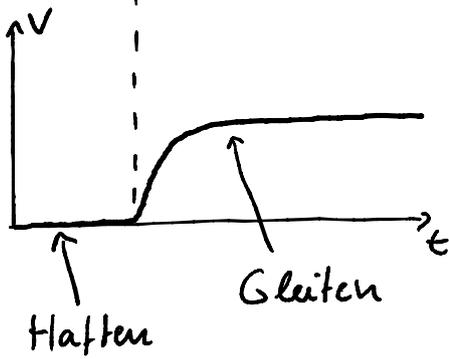
$F_n = \text{Normalkraft}$

$F_R = \text{Reibung}$

Experiment:

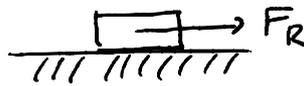
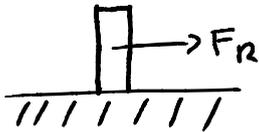


Haftreibung (Maximum!)  
Gleitreibung



$\Rightarrow$  Haftreibung  $\geq$  Gleitreibung

empirisch:  $F_R \sim F_n$ ; unabhängig von Auflagefläche

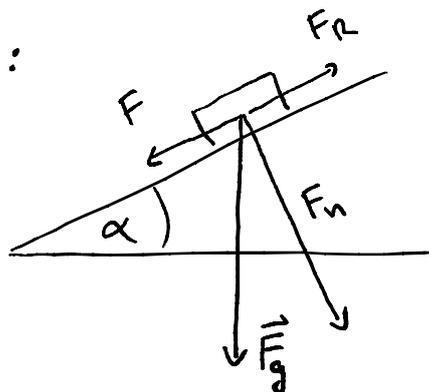


$\Rightarrow$   $F_H = \mu_H F_n$

$F_G = \mu_G F_n$

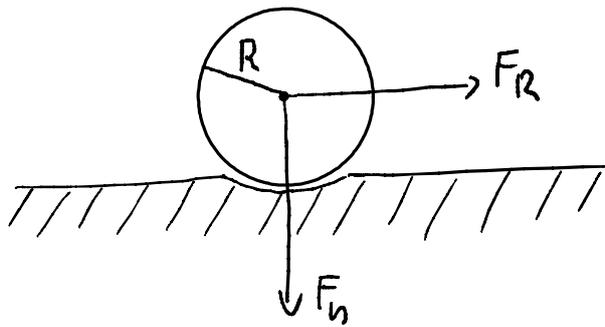
$\mu_H, \mu_G =$  Haft/Gleitreibungskoeffizient

• Messung  $\mu_H$ :



$$\begin{aligned} \mu_H &= \frac{F(\alpha_{\max})}{F_n(\alpha_{\max})} \\ &= \frac{F_g \sin(\alpha_{\max})}{F_g \cos(\alpha_{\max})} \\ &= \tan(\alpha_{\max}) \end{aligned}$$

- Rollreibung



empirisch:  $F_R \sim \frac{F_n}{R} \Rightarrow$

$$F_R = \mu_R \frac{F_n}{R}$$

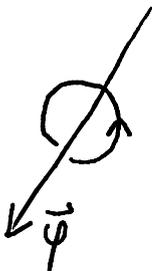
$\mu_R$  = Rollreibungskoeffizient

Beispiel, Stahl auf Stahl:

$\mu_H$	$\mu_G$	$\mu_R/R$
0,5-0,8	0,4	0,05

#### 4. Zentrales Kraftfeld

- Drehung in 3 Dimensionen:



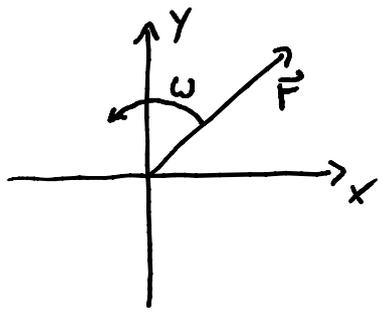
Winkel + Achse = Betrag + Richtung  
= Vektor

$\vec{\varphi}$  in Richtung der Drehachse

$|\vec{\varphi}| = \varphi$  Winkel

Drehsinn: "rechte Hand Regel"

• Rotation  $\vec{\omega} \equiv \dot{\varphi}$



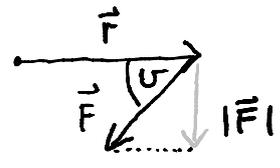
$$v = \omega r$$

$$\vec{v} \perp \vec{\omega} \text{ und } \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Ursache der Drehung:

- Drehmoment:  $\boxed{\vec{D} \equiv \vec{r} \times \vec{F}}$



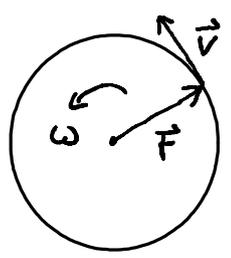
$$|\vec{D}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha$$

Kraft wirkt über ein Hebel

Hebelgesetz: Gleichgewicht für  $\sum \vec{D}_i = 0$

- Drehimpuls:  $\boxed{\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}}$

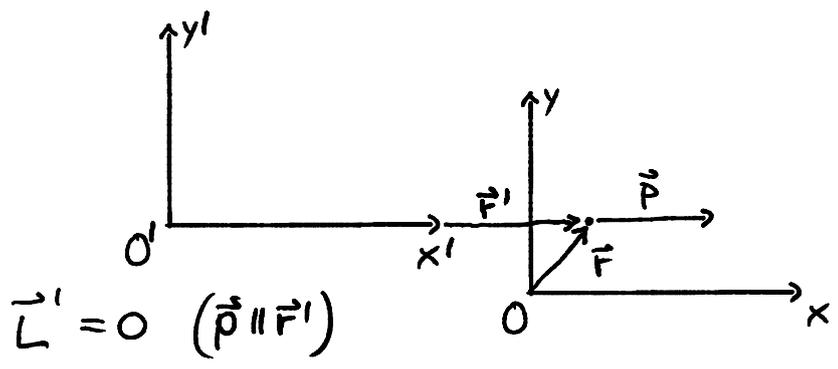
• Rotation (Kreisbahn)



$$\vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow v = \omega r$$

$$\Rightarrow L = m r^2 \omega$$

• beliebige Bewegung



$$\vec{L}' = 0 \quad (\vec{p}' \parallel \vec{F}')$$

$$\vec{L} \neq 0$$

Drehimpuls abhängig vom Koordinatensystem

• Zeitabhängigkeit:

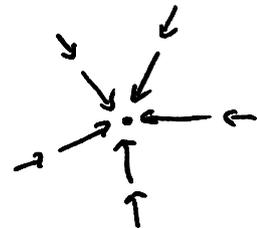
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ wegen } \vec{v} \parallel \vec{p}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}} \quad \begin{array}{l} \text{"}\dot{\vec{p}} = \vec{F}\text{" für Drehbewegung} \\ \vec{D} = \text{"Kraft" für Drehbewegung} \end{array}$$

$\vec{D} = 0 \Rightarrow$  Drehimpulserhaltung

- Drehimpuls im Zentralkraftfeld



$$\vec{F}_Z(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r \quad f = \text{beliebige Funktion von } r = |\vec{r}|$$

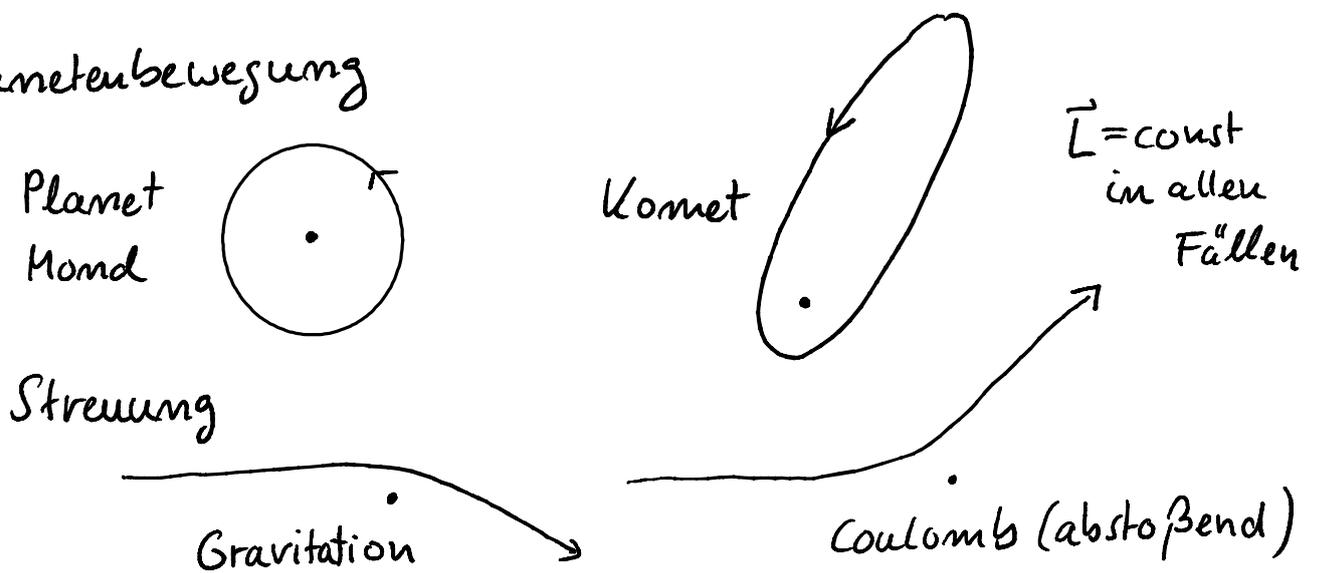
Beispiel: Gravitation, Coulomb  $f(r) \sim \frac{1}{r^2}$

$$\vec{F}_Z(\vec{r}) \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{mit } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_Z(\vec{r}) = r \vec{e}_r \times f(r) \vec{e}_r = r f(r) \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$  Im Zentralkraftfeld ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

## - Planetenbewegung



## Gravitation und Planetenbewegung:

Historisch erst Kinematik

im Bezugssystem der Erde, Ptolemäus



im Bezugssystem der Sonne (heliocentrisch)

Kopernikus: Kreisbahn 1543

Tycho Brahe: Genaue Beobachtungen 1546 - 1601

daraus Kepler:

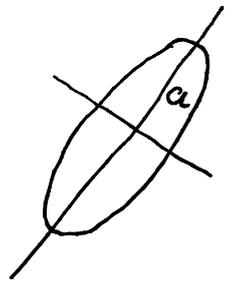
- Kepler Gesetze 1619 (kinematisch):

1.) Planetenbahnen sind Ellipsen in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2.) Der Radiusvektor (Fahrstrahl) überstreicht in gleichen Zeiten die gleiche Fläche.

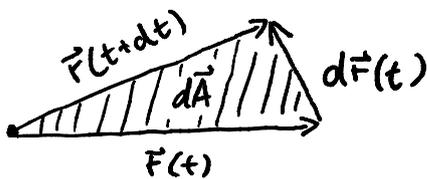
3.) Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T$  verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen  $a$ .

$$\frac{T^2}{a^3} \text{ für alle Planeten gleich.}$$



Dynamik mit Newton:

2:



$|\vec{A}| = \text{Fläche}$ ,  $\vec{A} \perp$  auf Fläche

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) dt = \frac{\vec{L}}{2m} dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const.}$$

2. Kepler Gesetz = Drehimpulserhaltung

3: für Kreisbahn:

Gravitationskraft  $\stackrel{!}{=} \text{Zentripetal Kraft}$

$$\frac{1}{r} \sim F_G \stackrel{!}{=} -m \frac{v^2}{r} = -m \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} \Rightarrow T^2 \sim r^3$$

$\uparrow$   
 $v = \frac{2\pi r}{T}$

außerdem  $F_G \sim m M$  mit  $m, M = \text{Planeten/Sonnenmasse}$

$\Rightarrow$

$$\vec{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

Newton'sches Gravitationsgesetz

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

3. Keplersches Gesetz = Newton'sche Gravitation

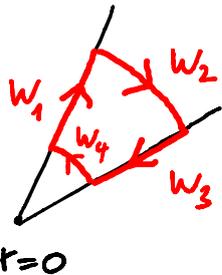
Kraft aus Potential:

$$E_{\text{pot}} = -G \frac{mM}{r}$$

$$\vec{F}_G = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}$$

$\Rightarrow \vec{F}_G = \text{Konservatives Kraftfeld}$

sieht man auch so:



$$\vec{F} \sim f(|F|) \vec{e}_r \Rightarrow$$

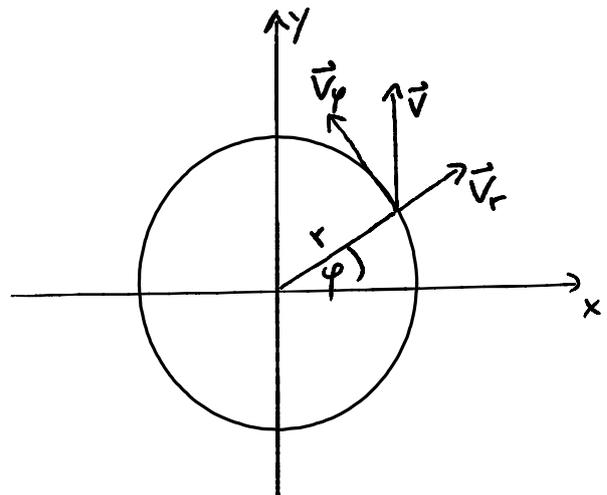
$$\left. \begin{array}{l} W_2 = W_4 = 0 \\ W_1 = -W_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

1: Haben  $\vec{L} = \text{const}$  und  $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}$

daraus Bahnkurve:

Polarkoordinaten  $r, \varphi$ :

Zerlegung  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$



$$L = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -G \frac{mM}{r} + \frac{m}{2} v^2 \quad \text{Gesamtenergie}$$

$$= -G \frac{mM}{r} + \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\varphi^2) \quad \leftarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\varphi$$

$$= -G \frac{mM}{r} + \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \text{const.}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{= \frac{L^2}{2mr^2}}$$

$$\Rightarrow -G \frac{mM}{r} + \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + G \frac{mM}{r}\right) \quad / \times \left(\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}\right)^{-2}$$

(Variablentausch  $t \rightarrow \varphi$ )

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mr^4}{L^2} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + G \frac{mM}{r}\right) \quad (*)$$

Lösung von (\*) raten:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$p, \varepsilon = \text{Konstanten}$

Anpassung der Konstanten:

$$p = \frac{L^2}{Gm^2M} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}}$$

$\varepsilon = \text{Exzentrizität}$

Beweis; Lösung in  $\textcircled{*}$  einsetzen:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\rho \varepsilon (-\sin\varphi)}{(1 + \varepsilon \cos\varphi)^2} = \frac{r^2 \varepsilon \sin\varphi}{\rho}$$

$(1 + \varepsilon \cos\varphi)^2 = \rho^2 / r^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4 \varepsilon^2}{\rho^2} \sin^2\varphi = \frac{r^4 \varepsilon^2}{\rho^2} (1 - \cos^2\varphi)$$

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$= \frac{r^4 \varepsilon^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\rho}{r} - 1\right)^2\right)$$

$\cos\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\rho}{r} - 1\right)$

$$= \frac{r^4}{\rho^2} \left(\varepsilon^2 - \frac{\rho^2}{r^2} + 2\frac{\rho}{r} - 1\right) \quad \text{gleiche Form wie } \textcircled{*}$$

einsetzen der Konstanten  $\varepsilon, \rho$ :

$$\frac{r^4}{\rho^2} \left(\varepsilon^2 - \frac{\rho^2}{r^2} + 2\frac{\rho}{r} - 1\right)$$

$$= \frac{2mr^4}{L^2} \frac{G^2 m^3 M^2}{2L^2} \left(\frac{2EL^2}{G^2 m^3 M^2} - \frac{L^4}{G^2 m^4 M^2 r^2} + \frac{2L^2}{Gm^2 Mr}\right)$$

$$= \frac{2mr^4}{L^2} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + G \frac{mM}{r}\right) = \textcircled{*} \quad \checkmark$$

- Diskussion der Keplerbahnen

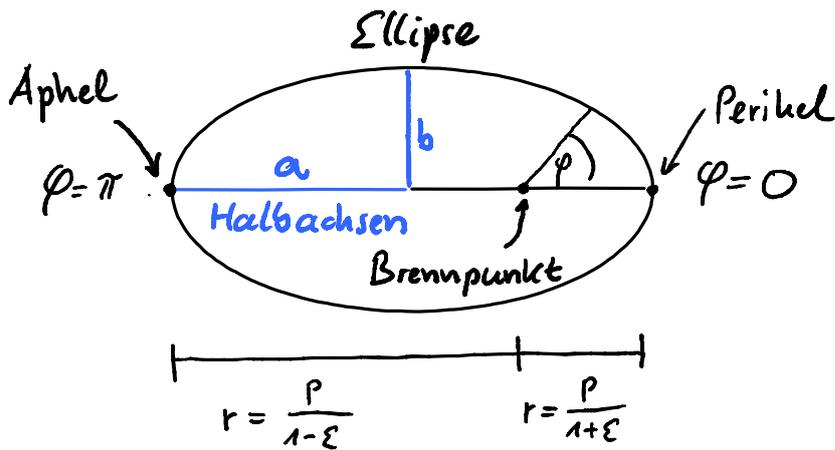
(i)  $\varepsilon = 0, E < 0$  gebundene Bahn

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{Gm^2 M} \quad \text{Kreisbahn (Kopernikus)}$$

$$\text{auch aus Zentripetalkraft} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m^2 v^2 r^2}{mr^3} = \frac{L^2}{mr^3}$$

$$= \text{Gravitationskraft} = G \frac{mM}{r^2}$$

(ii)  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $E < 0$  gebundene Bahn



mit

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; p = \frac{b^2}{a}$$

bzw

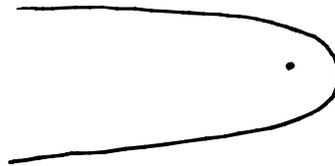
$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}; b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Achse raumfest!

(iii)  $\varepsilon = 1$ ,  $E = 0$  ungebundene Bahn (Grenzfall)

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad r(\varphi = \pi) = \infty$$

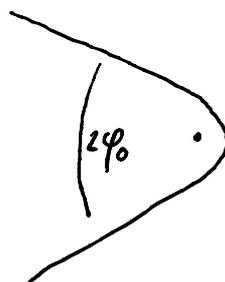
Parabel



(iv)  $\varepsilon > 1$ ,  $E > 0$  ungebundene Bahn

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad 0 < r < \infty \text{ nur für } -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$$

Hyperbel



$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

## - Ergänzungen

- Störung durch andere Planeten, Monde, Gezeiten, Sonnenwind etc.

⇒ Periheldrehung, Merkur:  $572''/\text{Jhd}$ ,  $43''/\text{Jhd}$  zu viel!

⇒ Planetenbewegung chaotisch, Grenze  $\approx 50 \text{ Myr}$

- Für kleine Modifikation

$$F \sim \frac{1}{r^{2+\gamma}} \quad \gamma \approx 0 \text{ aber } \gamma \neq 0$$

Anderere Raumdimensionen  $\gamma = 1, 2, 3 \dots$

⇒ Keine gebundenen Planetenbahnen

anthropisches Prinzip:  $\gamma \approx 0$

- Sonne nicht "raumfest"

⇒ Planet und Sonne kreisen um gemeinsamen

Schwerpunkt:

$$m \rightarrow \frac{mM}{m+M} \text{ reduzierte Masse (Kapitel 7)}$$

- Warum  $r(\varphi)$  und nicht  $r(t)$  oder  $\varphi(t)$ ?

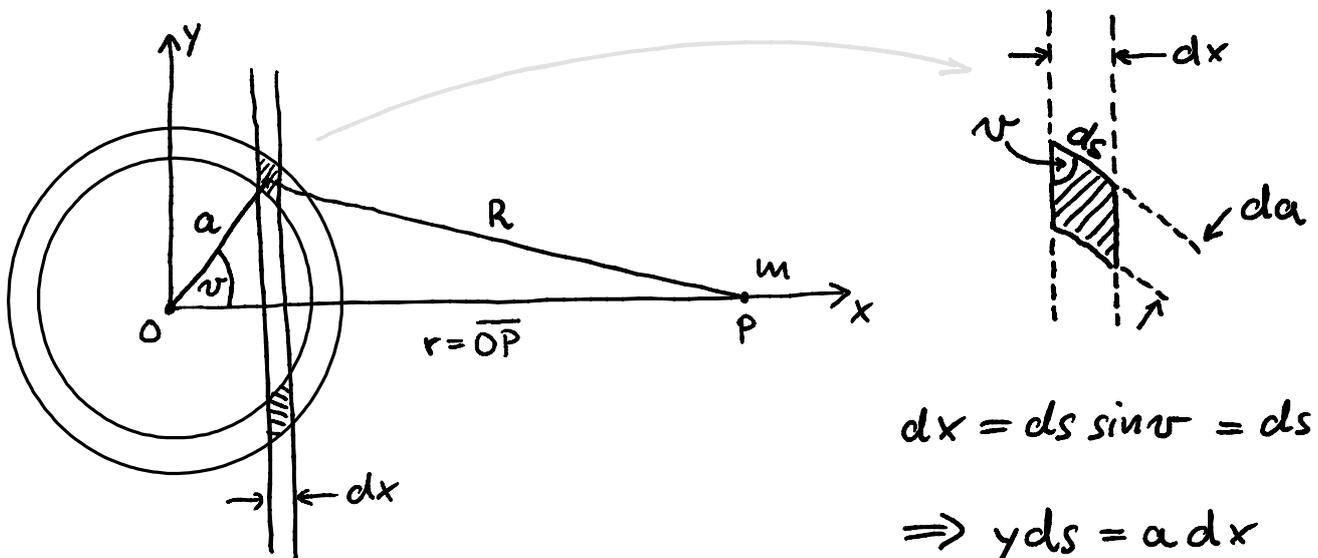
$$\text{versuche } \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + G \frac{mM}{r} \right)} \equiv \sqrt{a + b/r + c/r^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dr}{\sqrt{a + b/r + c/r^2}} = \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}(c+r(b+ar)) - b\sqrt{c+r(b+ar)} \ln(b+2ar+2\sqrt{ac+abr+(ar)^2})}{2\sqrt{a}\sqrt{ar^2+c+br}} = t$$

nicht nach  $r$  auflösbar, ähnlich für  $\varphi(t)$

- Gravitationspotential einer Hohlkugel



$$dx = ds \sin \nu = ds \frac{y}{a}$$

$$\Rightarrow y ds = a dx$$

Masse des Kreistrings :  $dM = \underbrace{2\pi y ds}_{\text{Umfang}} \underbrace{da}_{\text{Querschnitt}} \underbrace{\rho}_{\text{Dichte}} = 2\pi a dx da \rho$

$$\Rightarrow dE_{\text{pot}} = -G \frac{m dM}{R}$$

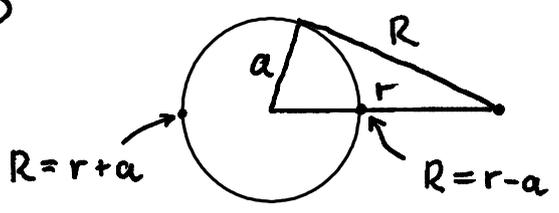
$$\Rightarrow E_{\text{pot}} = -2\pi \rho G m a da \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{R} \quad \text{aber } R = R(x)!$$

mit:  $R^2 = y^2 + (r-x)^2 = y^2 + r^2 - 2rx + x^2 \stackrel{x^2+y^2=a^2}{=} a^2 + r^2 - 2rx$

$$\frac{d}{dx} R^2 = 2R \frac{dR}{dx} = -2r \Rightarrow \frac{dx}{R} = -\frac{dR}{r}$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}} = \frac{2\pi\rho G m a da}{r} \int_{r+a}^{r-a} dR$$

\*\*



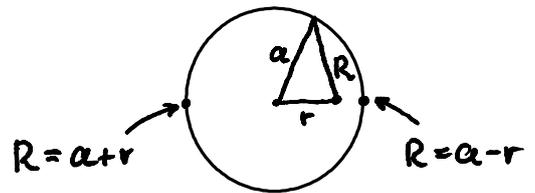
$$= \frac{2\pi\rho G m a da}{r} \underbrace{[(r-a) - (r+a)]}_{=-2a}$$

$$= \underbrace{-4\pi\rho a^2 da}_{=M} \frac{Gm}{r} = -G \frac{mM}{r}$$

$\Rightarrow$  Potential wie Punktmasse  $M$  an  $x=y=0$

Potential im Inneren

$$\textcircled{**} = \int_{a+r}^{a-r} dR = -2r$$



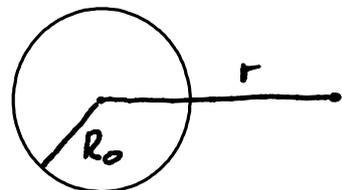
$$E_{\text{pot}} = \frac{2\pi\rho G m a da}{r} [-2r] = \underbrace{-4\pi\rho a^2 da}_{=M} \frac{Gm}{a} = -G \frac{mM}{a}$$

$\Rightarrow E_{\text{pot}} = \text{const.} \Rightarrow$  Keine Kraft

- Gravitationspotential einer Vollkugel

außen:

$$E_{\text{pot}} = -4\pi\rho G m \int_0^{R_0} \frac{a^2 da}{r}$$



$$= -G \underbrace{\frac{4\pi}{3} R_0^3 \rho}_{=M} \frac{m}{r} = -G \frac{mM}{r}$$

⇒ Potential wie Punktmasse  $M$  an  $x=y=0$

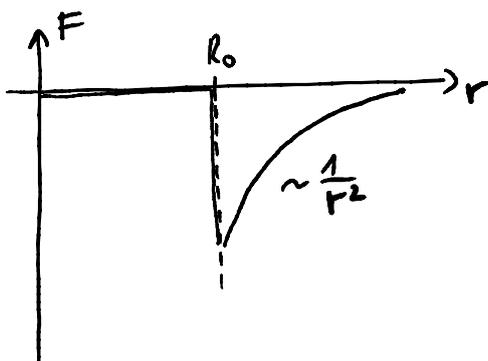
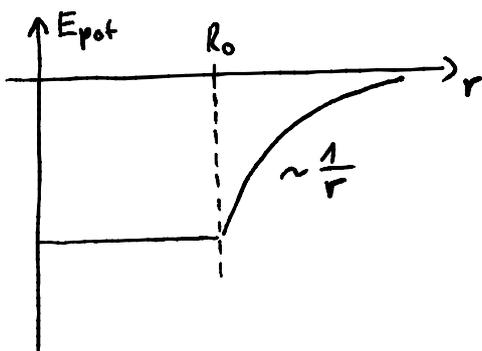
innen:

$$E_{\text{pot}} = -4\pi \rho G m \left( \int_0^r \frac{a^2 da}{r} + \int_r^{R_0} a da \right)$$

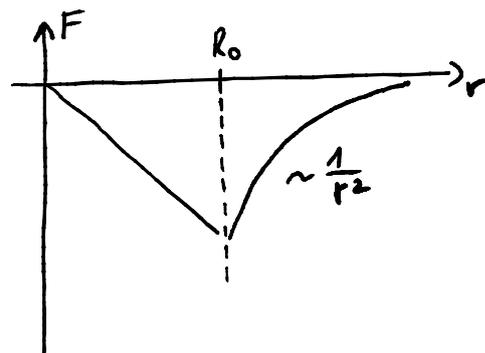
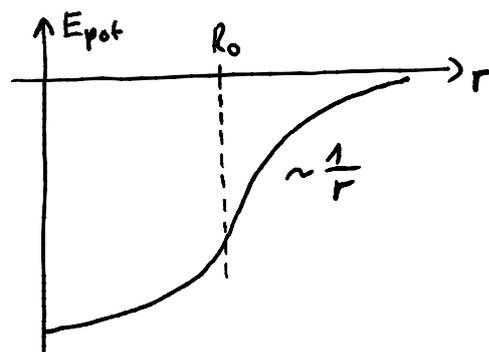
$$= -4\pi \rho G m \left( \underbrace{\frac{r^2}{3} + \frac{R_0^2}{2} - \frac{r^2}{2}}_{= \frac{R_0^2}{2} - \frac{r^2}{6}} \right)$$

$$= -\underbrace{\frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho}_{=M} G m \left( \frac{3}{2R_0} - \frac{r^2}{2R_0^3} \right)$$

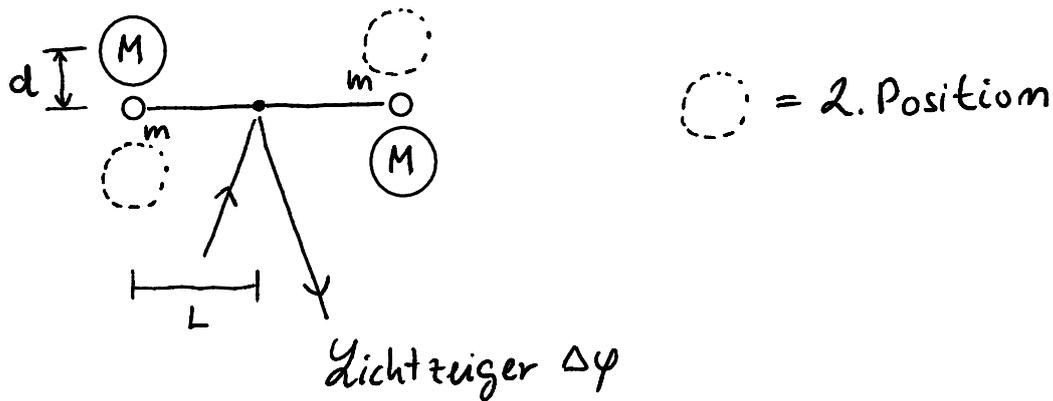
Hohlkugel



Vollkugel



- Gravitationswaage (Cavendish 1789)



kleine Kugel:  $m = 38,3 \text{ g}$      $r = 9,5 \text{ mm}$

große Kugel:  $M = 1,5 \text{ kg}$      $R = 32 \text{ mm}$

$L = 50 \text{ mm}$

$d = 47 \text{ mm}$  in Ruheposition

Auswertung:

schlecht messbar

• Torsion (Kapitel 10):  $\Delta D = D_R \Delta\varphi$

↑ Winkelrichtgröße  
↑ Drehmomentendifferenz

• Pendelperiode (Kapitel 9):  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D_R}}$

sehr gut messbar

• Trägheitsmoment (Kapitel 8):  $I = 2m \left( L^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)$

$$\Rightarrow \Delta D = 4 \times L \times G \frac{mM}{d^2} \stackrel{!}{=} D_R \Delta\varphi = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \Delta\varphi = \frac{4\pi^2 2m \left( L^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)}{T^2} \Delta\varphi$$

Messung:  $T = 488 \text{ s}$

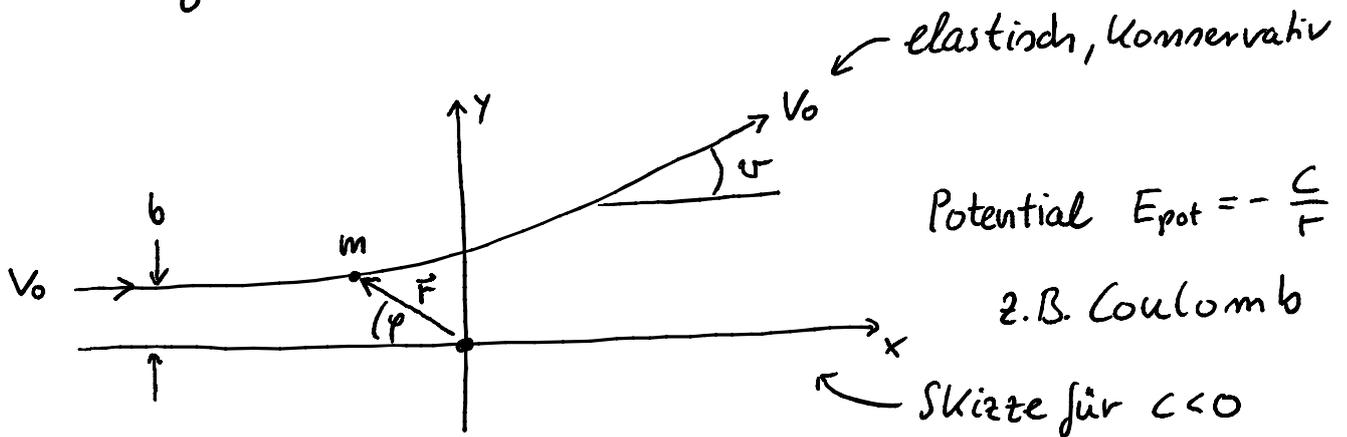
$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \frac{30 \text{ cm}}{14,4 \text{ m}}$$

↪ Lichtzeigerausschlag  $\times \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow G = \frac{2\pi^2(L^2 + \frac{2}{5}r^2)d^2}{T^2 L M} \quad \Delta\varphi = 6,4 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$\text{Literaturwert: } G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

- Streuung im Zentralfeld



$b = \text{Stoßparameter}$

$$L = m r^2 \dot{\varphi} = m |\vec{r} \times \vec{v}| = m v_0 b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 b} \frac{d\varphi}{dt}$$

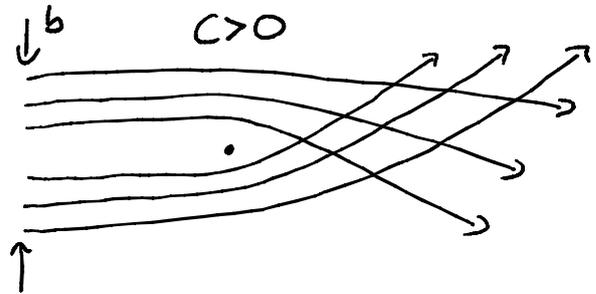
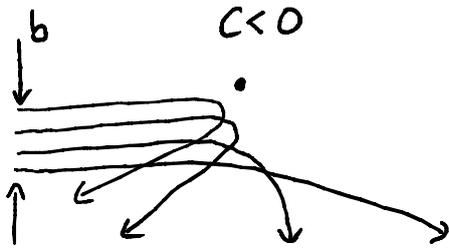
$$F_y = \frac{C}{r^2} \sin\varphi = \frac{C}{v_0 b} \frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi = m \frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{v_0 b} \int_0^{\pi-\alpha} \sin\varphi d\varphi = m \int_0^{v_0 \sin\alpha} dv_y$$

$$\Rightarrow \frac{C}{v_0 b} \underbrace{(1 - \cos(\pi - \alpha))}_{= 1 + \cos\alpha} = m v_0 \sin\alpha$$

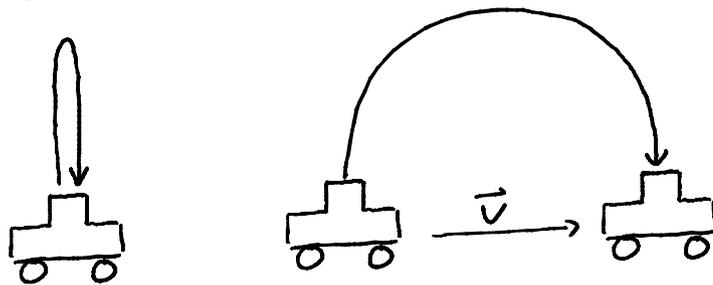
mit  $\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{1}{\tan \frac{\vartheta}{2}} \Rightarrow \boxed{\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{c}{m v_0^2 b}}$

aus Ablenkwinkel  $\vartheta$  und Stoßparameter  $b$  folgt  $c$ .  
Funktioniert auch mit anderen Potentialen.



## 5. Bewegte Bezugssysteme

- Inertialsysteme = unbeschleunigtes Koordinatensystem in dem  $\vec{F} = m\vec{a}$  gilt.
- Alle Inertialsysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, sind äquivalent.



- Galilei-Transformation (entlang  $x$ )

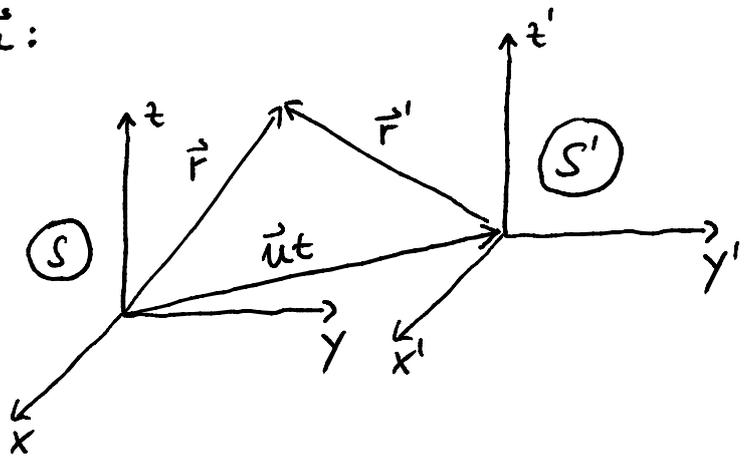
$$\begin{aligned} x &= x' + u_x t \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \quad (m=m') \end{aligned}$$

$u_x$  = relative Geschwindigkeit der Koordinatensysteme

in beliebiger Richtung  $\vec{u}$ :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$t = t'$$



hier:  $\textcircled{S}$  und  $\textcircled{S'}$  nicht gegeneinander verkippt:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_x' \quad \vec{e}_y = \vec{e}_y' \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z', \quad \text{aber } \vec{r} \neq \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{u} \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' \quad \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'$$

$\Rightarrow$  Alle Systeme  $S'$  mit  $\vec{u} = \text{const.}$  sind Inertialsysteme falls  $S$  ein Inertialsystem ist.

- Gleichförmig beschleunigte Koordinatensysteme:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t + \frac{1}{2} \vec{a}_s t^2 \quad t = t'$$

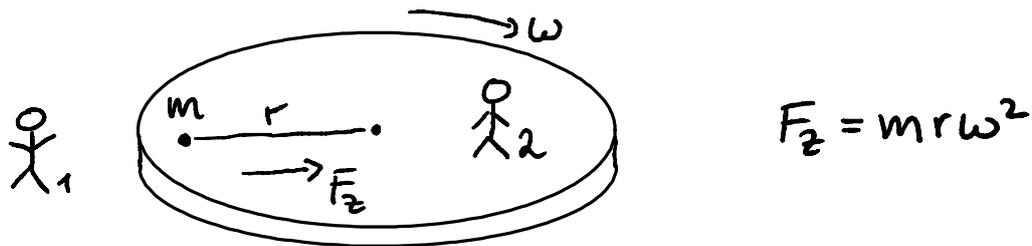
$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} + \vec{a}_s t$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_s$$

$$\Rightarrow S: \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad S': \vec{F}' = m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_s) = \vec{F} - m\vec{a}_s$$

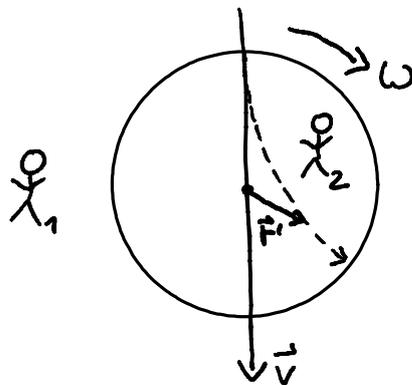
$\Rightarrow$  zusätzliche Kraft in  $S'$ :  $\vec{F}_s = -m\vec{a}_s$ , Scheinkraft.

- Gleichförmig rotierende Bezugssysteme (z.B. Erde)



- Beobachter 1: Masse  $m$  wird beschleunigt, Kraft  $F_z$  zwingt sie auf Kreisbahn (Zentripetalkraft)
- Beobachter 2: Benötige Kraft  $F_z$  um Masse  $m$  in Ruhe zu halten  $\Rightarrow$  Kraftfeld  $-F_z$   
 (Zentrifugalkraft = "Fiehkraft")  
⏟  
Scheinkraft

- Corioliskraft



- $\chi_1$  sagt: "geradlinige Bewegung  $\Rightarrow$  keine Kraft"
- $\chi_2$  sagt: "gekrümmte Bahn  $\Rightarrow$  Kraft"

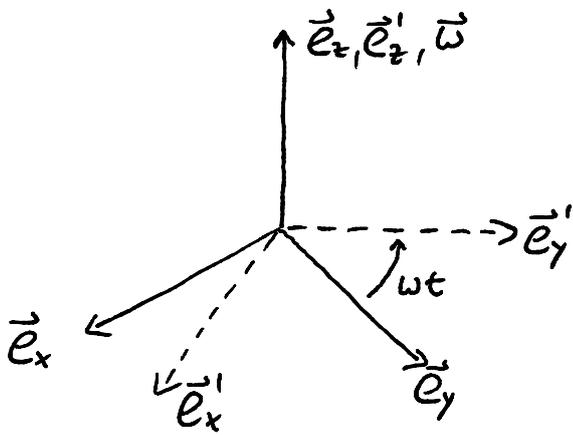
$$\text{mit } L = m \omega r^2 \Rightarrow \dot{L} = 2 m \omega r \dot{r} = D = r F$$

$$\Rightarrow \boxed{F_c = 2 m \dot{r} \omega} \quad \text{Betrag der Corioliskraft}$$

- 3 dimensionale Beschreibung

Rotation:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Geschwindigkeit durch die Rotation



- hier:
- Ursprung von  $S$  und  $S'$  identisch:  $\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}'$
  - $\vec{e}_x \neq \vec{e}'_x$   $\vec{e}_y \neq \vec{e}'_y$
  - Einheitsvektoren in  $S$ , ausgedrückt durch Einheitsvektoren in  $S'$ , zeitabhängig.

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z = \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z + x\dot{\vec{e}}_x + y\dot{\vec{e}}_y + z\dot{\vec{e}}_z$$

jetzt  $\vec{\omega}$  beliebige Richtung

rotationsbedingte Änderung:  $\dot{\vec{e}}' = \vec{\omega} \times \vec{e}'$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

↑ nur Koordinaten  $x', y', z'$  ableiten  
(Geschwindigkeit in  $S'$ )

Allgemeiner als Operator:

$$\frac{d}{dt} \square = \frac{d'}{dt} \square + \vec{\omega} \times \square \quad \text{wirkt auf } \square$$

Anwendung auf  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  (wollen Beschleunigung)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d'}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} \uparrow = \frac{d'}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

$$= \frac{d'^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\uparrow$   $\vec{a}'$        $\uparrow$   $\vec{v}'$        $\uparrow$   $\vec{r} = \vec{r}'$

/x m  $\Rightarrow$

$$\vec{F}' = m \vec{a}' = \vec{F} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

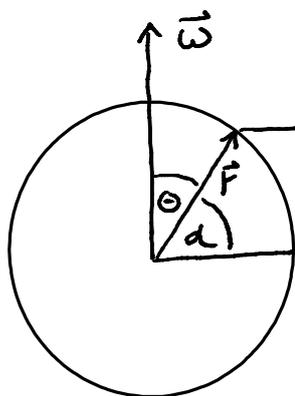
$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Scheinkräfte}}$

Coriolis      Zentrifugal

- "Newton" im rotierenden Koordinatensystem
- Scheinkräfte verschwinden für  $\vec{\omega} = 0$
- keine Zentrifugalkraft auf der Achse  $\vec{r}' \parallel \vec{\omega}$
- Corioliskraft  $\perp \vec{\omega}$  und  $\perp \vec{v}'$

Beispiel:

### i) Zentrifugalkraft Erde



$$\vec{F}_z = -m \vec{\omega} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\perp \vec{\omega}})$$

$$\Rightarrow F_z = m \omega^2 r \sin \theta$$

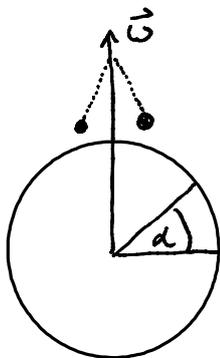
$90^\circ - \theta = \alpha = \text{Breitengrad}$ , München  $\alpha = 48^\circ$

$$r = 6380 \text{ km}, \quad \omega = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_z}{m} = 0,023 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

### ii) Coriolis, Autofahrt 100 km/h nach Osten $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$

$$\frac{F_c}{m} = 2 \omega v' = 0,0040 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

### iii) Foucault Pendel



Nordpol:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Äquator:  $T = \infty$

allgemein:  $T = \frac{2\pi}{\omega \sin \alpha}$

München:  $T = 32 \text{ h}$  oder  $11,3^\circ/\text{h}$

Messung:  $-0,7^\circ$  um 10:42  
 $10,8^\circ$  um 11:42 }  $11,5^\circ/\text{h}$

## 6. Spezielle Relativitätstheorie

(zurück zu den Inertialsystemen)

- Newtonsche Mechanik ist invariant unter Galilei Transformation.
- Maxwell Gleichungen nicht!

Beispiel: ruhende Ladung E-Feld  
bewegte Ladung B-Feld

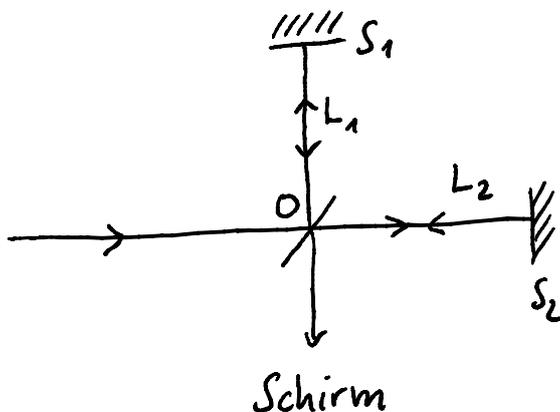
Maxwell beschreibt Lichtausbreitung.

Wie transformieren?

Was ist das Medium (Äther)?

Im welchem Bezugssystem ruht der Äther?

- Michelson-Morley (1881-1887)



Konstruktive Interferenz

falls  $L_1 = L_2$

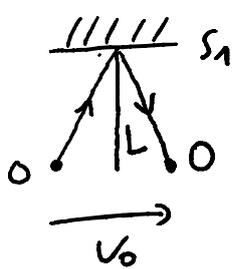
$\Rightarrow$  Schirm hell

Annahme: Ätherwind  $\xrightarrow{v_0}$  und  $L_1 \approx L_2 \approx L$

Laufzeit im Arm parallel zum Ätherwind:

$$t_{0s_0} = \frac{L}{c+v_0} + \frac{L}{c-v_0} = \frac{2Lc}{c^2-v_0^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}$$
$$\approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right) \quad v_0 \ll c$$

Laufzeit im Arm senkrecht zum Ätherwind:



$$c^2 t_{0s_1}^2 = L^2 + v_0^2 t_{0s_1}^2$$

$$\Rightarrow t_{0s_1} = \frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow t_{0s_10} = 2t_{0s_1} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_{0s_20} - t_{0s_10} \approx \frac{L}{c} \frac{v_0^2}{c^2}$$

$$\text{Drehung um } 90^\circ \Rightarrow \Delta t = -\frac{L}{c} \frac{v_0^2}{c^2}$$

Verschiebung der Interferenzstreifen

$$\Delta N = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = -\frac{2L}{\lambda} \frac{v_0^2}{c^2}$$

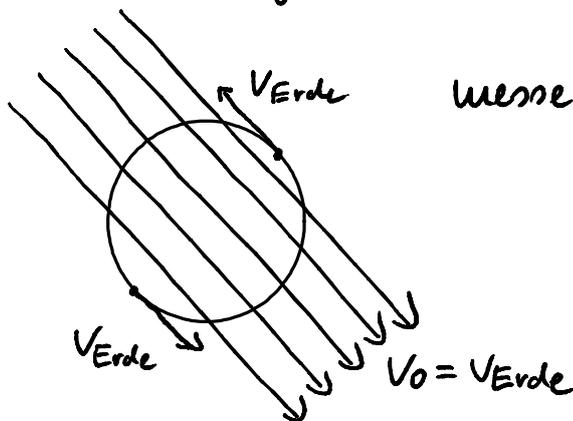
1887:  $L = 11 \text{ m}$ , Annahme  $v_0 = 30 \text{ km/s}$  (Erdbahn)

$$\lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \Delta N = 0,44$$

Gemessen:  $\Delta N < 0,01$  (heute:  $\Delta N < 10^{-17}$ )

- mögliche Erklärungen:

i)  $v_0 = 0$  Äther driftet mit der Erde



messe  $\frac{1}{2}$  Jahr später:  
immer noch kein Effekt.

ii) Äther wird mit der Erde mitgeführt

iii) Armlänge in Richtung des Ätherwinds verkürzt

sich um einen Faktor  $\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$ :

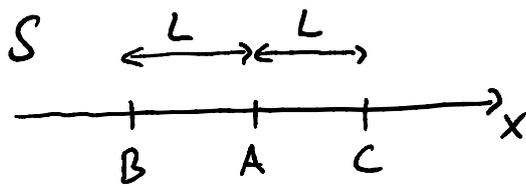
$$t_{0s20} \rightarrow \frac{2L \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{c} \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = t_{0s10}$$

iv) Es gibt keinen Äther

$\Rightarrow$  Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich.

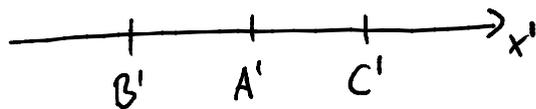
$\Rightarrow$  spezielle Relativitätstheorie (Einstein 1905)

- Konsequenzen:



$S$  "ruht"

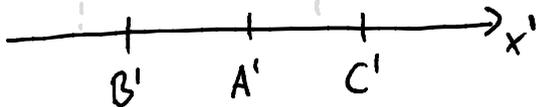
$S'(t=0)$



$S'$  bewegt sich in  $S$

$t=0: A=A', B=B', C=C'$

$S'(t>0)$



Bei  $t=0$  wird ein Lichtblitz in  $A=A'$  ausgelöst:

- $S$ : Licht kommt gleichzeitig in  $B$  und  $C$  an.
- $S$ : Licht kommt nicht gleichzeitig in  $B'$  und  $C'$  an.
- $S'$ : Licht kommt gleichzeitig in  $B'$  und  $C'$  an.
- $S'$ : Licht kommt nicht gleichzeitig in  $B$  und  $C$  an.

$\Rightarrow$  Gleichzeitigkeit hängt vom Bezugssystem ab!

$\Rightarrow t \neq t'$

$\Rightarrow$  Modifikation der Galilei Transformation nötig

Versuche:

$$x' = x - vt \longrightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = x' + vt' \longrightarrow x = \gamma(x' + vt')$$

Experiment entscheidet  
Ansatz

Lichtausbreitung:  $x = ct$  und  $x' = ct'$

$$ct' = x' = \gamma(ct - vt) \quad \text{I}$$

$$ct = x = \gamma(ct' + vt') \quad \text{II}$$

$$\text{I} \times \text{II} \Rightarrow c^2 tt' = \gamma^2 (c^2 - v^2) tt'$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Transformation der Zeit:

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma^2 x - v\gamma^2 t + v\gamma t'$$

$\uparrow$   
 $\gamma(x - vt)$

$$\Rightarrow t' = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \frac{x}{v} + \gamma t = \gamma \left( \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \frac{x}{v} + t \right)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} - 1 = 1 - \frac{v^2}{c^2} - 1 = -\frac{v^2}{c^2}$$

$$= \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

⇒ Lorentztransformation (entlang  $x$ )

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & y' &= y & z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

• für  $v \ll c \rightarrow$  Galilei Transformation

• Symmetrisch: Ort  $x=0$  in  $S'$ :  $x' = -\frac{vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -vt'$

Ort  $x'=0$  in  $S$ :  $x = +vt$

inverse Transformation:  $v \leftrightarrow -v$ ,  $x' \leftrightarrow x$ ,  $t' \leftrightarrow t$

- Konsequenzen:

i) Zeitdilatation

• Uhr ruht in  $S$  bei  $x_1 = x_2$ :

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

⇒  $S'$  sagt

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Uhr ruht in  $S'$  bei  $x'_1 = x'_2$ :

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t$$

$x = vt + x_0$

Keine Koordinatentransformation!

$$\Rightarrow S \text{ sagt } \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Symmetrisch: S und  $S'$  sagen: "Bewegte Uhren gehen langsamer"

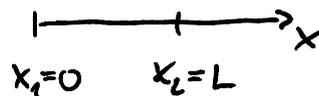
$\Rightarrow v \rightarrow c$ : Zeit bleibt im anderen Bezugssystem "stehen".

$\Rightarrow$  Lorentztransformation nur für  $v < c$

$\Rightarrow$  Universelle Geschwindigkeitsbegrenzung

## ii) Lorentzkontraktion

- Stab der Länge  $L$  ruht in  $S$



$$L' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Positionen gleichzeitig messen:

$$t'_2 - t'_1 = 0 \Rightarrow t_2 - t_1 = (x_2 - x_1) \frac{v}{c^2}$$

$$\Rightarrow L' = x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow S' \text{ sagt } \boxed{L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Stab der Länge  $L'$  ruht in  $S'$

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gleichzeitig in  $S$ :  $t_2 - t_1 = 0$

$$\Rightarrow S \text{ sagt } \boxed{L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Symmetrisch:  $S$  und  $S'$  sagen: "Bewegte Stäbe sind kürzer"

### iii) Doppler Effekt, Vergleich mit Akustik

- Schall

Frequenz  $f_0 = \frac{c}{\lambda}$  im Bezugssystem der Quelle



↑ im Bezugssystem des Mediums

$$\Rightarrow f' \approx \left(1 - \frac{v_q - v_e}{c} + \dots\right) f_0$$

↑ Relativgeschwindigkeit in 1. Ordnung

- Licht, im Bezugssystem des Empfängers

$$f' = \frac{c}{c+v_q} f_0 \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}}$$

← Zeitdilatation

↖ geometrische Effekt wie in der Akustik

$$= \frac{\sqrt{c^2 - v_q^2}}{c + v_q} f_0 = \frac{\sqrt{(c - v_q)(c + v_q)}}{c + v_q} f_0 = \sqrt{\frac{c - v_q}{c + v_q}} f_0$$

$$\approx \left(1 - \frac{v_q}{c} + \dots\right) f_0$$

hängt nur von Relativgeschwindigkeit  $v_q$  ab

neu: transversaler Doppler Effekt

Quelle bewegt sich  $\perp$  zur Sichtlinie

$$f' = f_0 \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} \approx \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_q}{c}\right)^2 + \dots\right) f_0$$

- Kausalität

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Vorzeichenwechsel  $\Delta t \rightarrow \Delta t'$  falls  $\frac{v}{c^2} \Delta x > \Delta t$

Ereignisse vertauschen zeitliche Reihenfolge!

Wegen  $v \leq c$  nur für  $\Delta x > c \Delta t$

"weit genug voneinander entfernt"

⇒

Ursache - Wirkung (Information)  
breitet sich mit  $v \leq c$  aus.

- Vorgriff auf höhere Semester:

- Maxwell Gleichungen transformieren sich mit Lorentztransformation

z.B.  $E'_x = \gamma (E_x + v B_z)$

$$B'_z = \gamma (B_z + \frac{v}{c^2} E_x)$$

$$(E \leftrightarrow B)$$

↑ ruhende Ladung    ↑ bewegte Ladung

- Modifikation der Newtonschen Mechanik

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$m_0 = \text{Ruhemasse} = m(v=0)$

$$m(v=c) = \infty$$

$$m_0 = 0 \iff v=c \text{ (Photonen)}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F = \dot{p} = \frac{d}{dt} (m(v)v)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 + \dots$$

↑ Konstante    ↑ Newtonsche kinetische Energie

relativistische Korrekturen

Spezielle Relativitätstheorie passt wunderbar zur Quantenmechanik ( $\rightarrow$  Spin).

(aber nicht die ART)



## Relativistischer Dopplereffekt

$$f_p = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}}$$

← Zeitdilatation  
← geometrischer Effekt

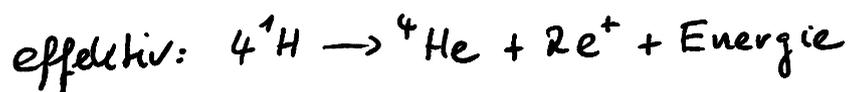
$$f_a = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$\Rightarrow f_p f_a = f_0^2 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c})} = f_0^2$$

innerhalb  $8 \times 10^{-8}$  getestet

(z.B. Reimhardt et al. Nature Physics 3, 861 (2007))

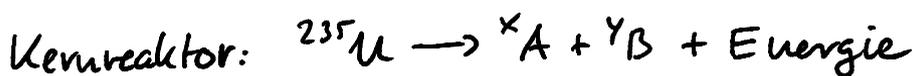
### iii) Kernfusion / Kernspaltung



${}^4_2\text{He}$  leichter als  $4 {}^1_1\text{H}$

Fusion exotherm

Fission exotherm



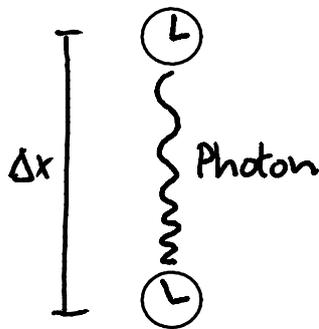
${}^X_Z\text{A} + {}^Y_Z\text{B}$  leichter als  ${}^{235}_{92}\text{U}$

${}^{56}_{26}\text{Fe}$

#### iv) Allgemeine Relativität

beschleunigte Koordinatensysteme (Gravitation)

- Gravitationsrotverschiebung



$$\Delta E = mg \Delta x = \frac{h\nu}{c^2} g \Delta x$$

Photonenergie

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{g}{c^2} \Delta x$$

$$\frac{g}{c^2} = 10^{-16} \text{ pro meter}$$

Test mit Atomuhr in Rakete  $\Delta x = 10000 \text{ km}$

Vessot et al. Phys. Rev. Lett. 45, 2081 (1980)

- Periheldrehung



Merkur:  $43''$  pro Jhd.

Zeit läuft langsamer hier

Neuerer Test mit Doppelpulsar:  $16,9^\circ$  pro Jahr

Kramer et al. Science 314, 97 (2006)

siehe auch Shapiro Effekt

v) ... und viele mehr

SR sehr gut getestet; AR nicht so gut.

# 7. Systeme von Massenpunkten

(zurück zur nicht relativistischen Physik)

Massen  $m_1, m_2, m_3 \dots m_N$

Orte  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \dots \vec{r}_N$

Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{v}_N$

Gesamtmasse:  $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Schwerpunkt:  $\vec{R}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$   
= "gewichtetes Mittel der Orte  $\vec{r}_i$ "

Schwerpunktgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_S = \dot{\vec{R}}_S = \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Schwerpunktbeschleunigung:

$$\vec{a}_S = \ddot{\vec{R}}_S = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i$$

gewichtetes Mittel

Schwerpunktimpuls:

$$\vec{P}_S = M \dot{\vec{R}}_S = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

Kein gewichtetes Mittel  
sondern Summe

Gesamtkraft:

$$\vec{F}_g = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_s = M \vec{a}_s$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_g = M \vec{a}_s}$$

- Schwerpunkt verhält sich wie Massenpunkt.
- Kapitel 3: Massenpunkt = Schwerpunkt
- Gesamtkraft greift im Schwerpunkt an.

Innere Kräfte zwischen Massenpunkten:

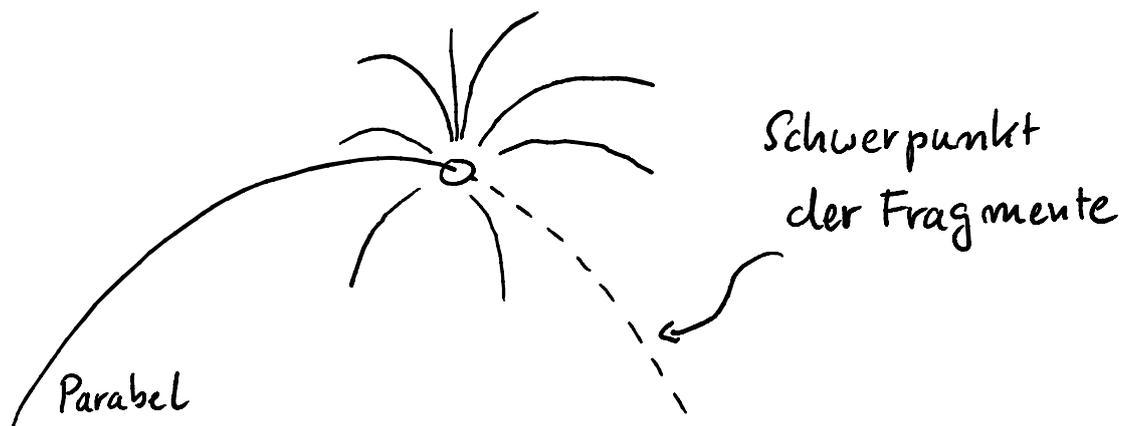
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (\text{actio} = \text{reactio})$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}}_{=0} + \dots = 0 \quad (\text{siehe Kapitel 3})$$

$\Rightarrow$  Nur externe Kräfte können den Schwerpunktimпульs ändern

$$\Rightarrow \vec{F}_g = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Beispiel: explodierende Sylvesterrakete



Koordinatentransformation ins Schwerpunktsystem

$$\vec{r}_{is} \equiv \vec{r}_i - \vec{R}_s \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{is} \equiv \vec{v}_i - \vec{v}_s$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_{is} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_s) = \vec{R}_s - \vec{R}_s = 0$$

Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem:  $\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_{is} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i \vec{p}_{is} = 0}$$

Kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_{is} + \vec{v}_s)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{is}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_s^2 + \vec{v}_s \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{is}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $\equiv E_{\text{kin},s}$   $= \frac{1}{2} M v_s^2$   $= \sum_i \vec{p}_{is} = 0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{Kin. Energie} = \text{Kin. Energie im Schwerpunktsystem} + \frac{1}{2} M v_s^2}$$

$\nearrow$   
z.B. Wärme

$\nearrow$   
Kin. Energie des  
Schwerpunkts

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{F}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i (\vec{F}_{is} + \vec{R}_s) \times (\vec{v}_{is} + \vec{v}_s)$$

$$= \sum_i m_i \vec{F}_{is} \times \vec{v}_{is} + M \vec{R}_s \times \vec{v}_s$$

$$+ \vec{R}_s \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{is}}_{=0} - \vec{v}_s \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{F}_{is}}_{=0}$$

⇒

Drehimpuls = innerer Drehimpuls + Drehimpuls des Schwerpunkts

z.B. Spin

Bahndrehimpuls

nur innere Kräfte:

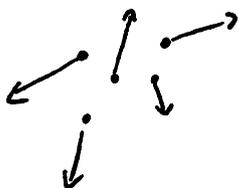
$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \dot{\vec{D}}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} (\vec{F}_i - \vec{F}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

↑  
 $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{F}_i - \vec{F}_j$

⇒ innere Kräfte können den Drehimpuls nicht ändern

Beispiele von Systemen von Massenpunkten:

i) ideales Gas



$N$  sehr groß

keine Wechselwirkung, nur Stöße

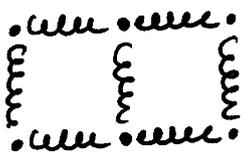
## ii) Moleküle



$N$  klein

Wechselwirkung: Bindungsenergie

## iii) Starrer Körper



$N$  sehr groß

$\vec{r}_{ij} \approx \text{const.}$  wegen der Wechselwirkung

## — Systeme aus zwei Massenpunkten

z.B. Planetenbewegung, Wasserstoffatom

$$m_1, m_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}$$

↑  
nur innere Kräfte

Definition:  $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  reduzierte Masse

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \mu \dot{\vec{v}}_{12}$$

$$\vec{v}_{12} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Relativgeschwindigkeit

$\Rightarrow$

Dynamik zweier wechselwirkender Massenpunkte kann wie ein Massenpunkt mit reduzierter Masse und Relativkoordinaten beschrieben werden.

- Kinetische Energie im Relativkoordinaten:

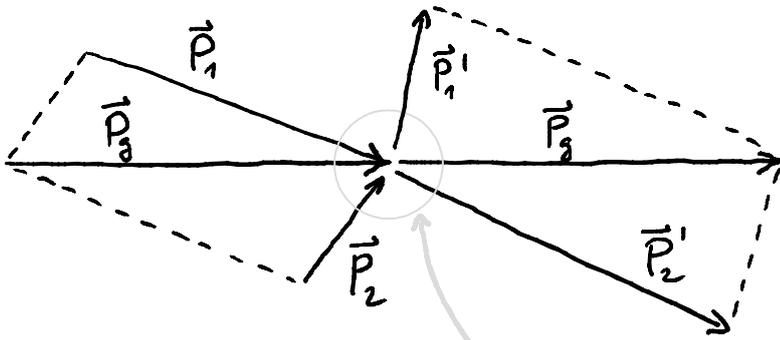
$$\begin{aligned}
 E_{\text{kin},S} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 - \frac{1}{2} M V_S^2 \\
 &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left( \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2}{m_1 + m_2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 + v_2^2 - 2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \\
 &= \frac{1}{2} \mu v_{12}^2
 \end{aligned}$$

- Vollkommen inelastischer Stoß (Kapitel 3):

$$\begin{aligned}
 v_2 = 0 \quad v_1' = v_2' & \quad \text{nach dem Stoß} \\
 E_{\text{diss}} = E_{\text{kin}} - E_{\text{kin}}' & \\
 = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v_1'^2 & \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_1' \\
 = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 & \\
 = \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 + m_1 m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 & \\
 = \frac{1}{2} \mu v_1^2 = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad (v_2 = 0) &
 \end{aligned}$$

⇒ Gesamte relative kinetische Energie →  $E_{\text{diss}}$

# - Stoßgesetze in 3D



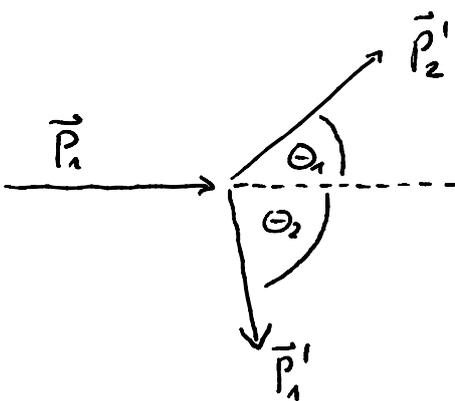
Wechselwirkungszone

Details irrelevant für Impulserhaltung

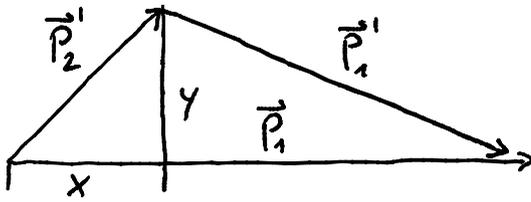
Impulssatz:  $\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$

Energiesatz:  $E_{kin,1}' + E_{kin,2}' + E_{diss} = E_{kin,1} + E_{kin,2}$

Vereinfachung:  $\vec{P}_2 = 0$  immer möglich durch Wahl des Bezugssystems



$\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = \vec{P}_1 \Rightarrow$  der Stöße in einer Ebene (2D)



$$p_1'^2 = (p_1 - x)^2 + y^2 \quad p_2'^2 = x^2 + y^2$$

elastischer Stoß, Energiesatz:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{(p_1 - x)^2 + y^2}{2m_1} + \frac{x^2 + y^2}{2m_2} \quad | \times 2m_1$$

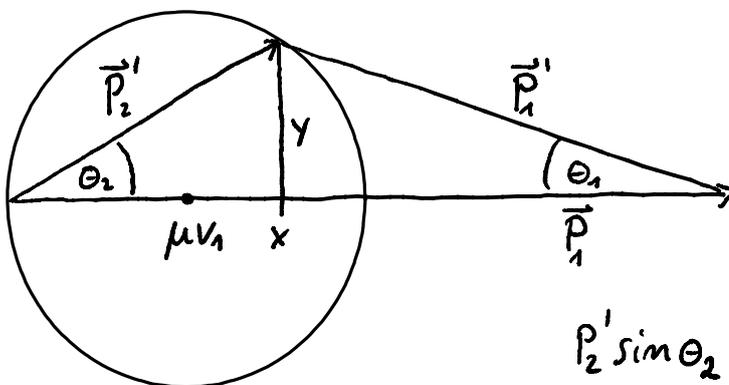
$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1^2 - 2x m_1 v_1 + x^2 + y^2 + \frac{m_1}{m_2} (x^2 + y^2)$$

$$0 = -2x m_1 v_1 + \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}_{= \frac{m_1}{\mu}} (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2\mu x v_1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \mu v_1)^2 + y^2 = (\mu v_1)^2$$

Kreis mit Mittelpunkt  $x = \mu v_1$   $y = 0$ , Radius  $\mu v_1$ :

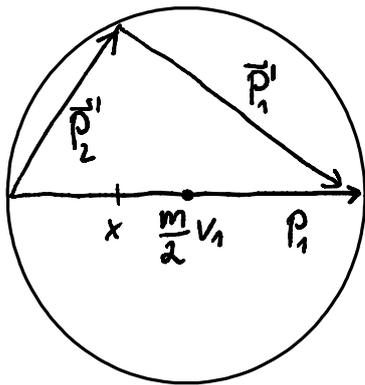


$$p_2' \sin \theta_2 = p_1' \sin \theta_1$$

mehr Unbekannte als Gleichungen

aber z.B. aus  $\theta_1$  oder  $\theta_2$  oder  $\vec{p}_2' \Rightarrow \vec{p}_1'$

Spezialfall  $m_1 = m_2 = m \Rightarrow \mu = \frac{m}{2} \quad P_1 = m v_1$



Satz von Thales:

$$\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2$$

- Stoß im Schwerpunktsystem:

$$\vec{p}_{1S} = -\vec{p}_{2S} \quad \vec{p}'_{1S} = -\vec{p}'_{2S}$$

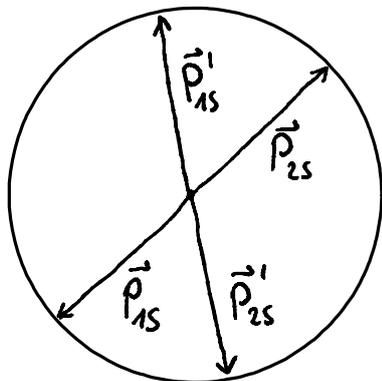
$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1S}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1S}^{\prime 2} + E_{diss}$$

Graphisch:

$$E_{diss} = 0 \Rightarrow p_{1S} = p_{2S} = p'_{1S} = p'_{2S}$$

nur Richtungen ändern

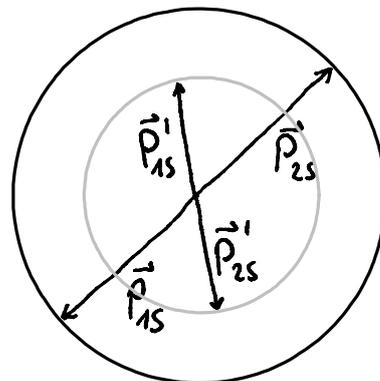
Sich:



$$E_{diss} \neq 0 \Rightarrow p_{1S} = p_{2S} \neq p'_{1S} = p'_{2S}$$

auch Längen ändern

Sich:



# 8. Bewegung starrer Körper

Massenpunkte  $m_i \rightarrow$  Massenelemente  $\Delta m_i$   
mit Volumen  $\Delta V_i$

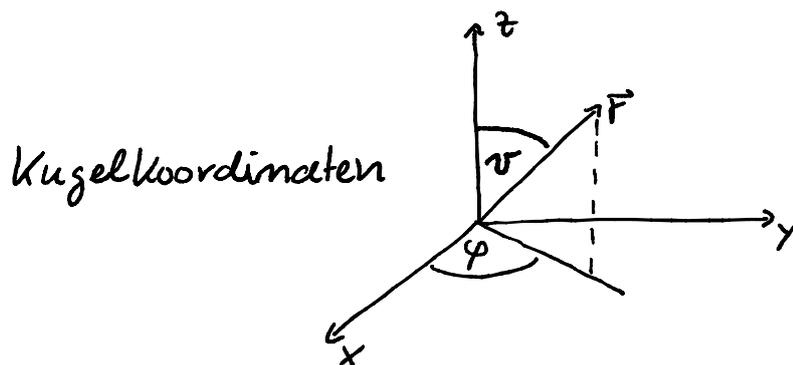
$$\Rightarrow V = \sum_i \Delta V_i \quad M = \sum_i \Delta m_i$$

Dichte  $\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} = \text{const.}$  für homogenen Körper

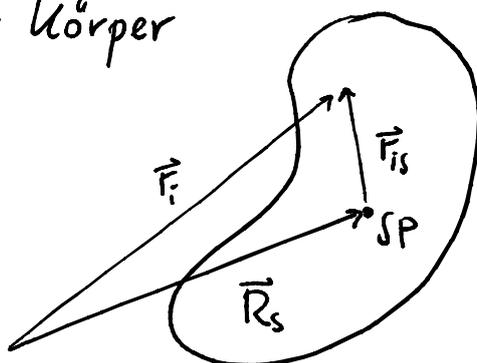
Kontinuum:  $M = \sum_i \rho_i \Delta V_i \rightarrow M = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz$

Beispiel: homogene Kugel

$$M = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \rho \underbrace{r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta}_{= dV} = \rho \underbrace{\frac{4}{3} \pi R^3}_{= V}$$



Starrer Körper



Schwerpunkt SP:

$$\vec{F}_{is} = \vec{F}_i - \vec{R}_s$$

$$\vec{v}_{is} = \dot{\vec{F}}_i - \dot{\vec{v}}_s$$

Starrer Körper = Abstände zwischen den Massenelementen und zum Schwerpunkt (SP) sind fest.

$$\Rightarrow r_{is}^2 = (\vec{r}_i - \vec{r}_s)^2 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} r_{is}^2 = 2(\vec{r}_i - \vec{r}_s) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_s) = 2\vec{r}_{is} \cdot \vec{v}_{is} = 0$$

$\Rightarrow$  Geschwindigkeit  $\perp$  auf Ortsvektor im SP System

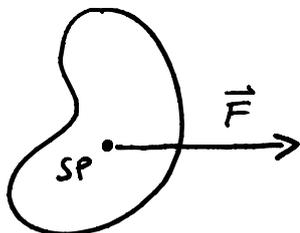
$$\Rightarrow \text{Drehung im Schwerpunktsystem: } \vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is} + \vec{v}_s}$$

- Rotation um Schwerpunkt und Translation
- Bewegung aller Massenelemente läßt sich durch Angabe von 6 Zahlen  $\vec{\omega}$  und  $\vec{v}_s$  beschreiben.
- $3+3=6$  Freiheitsgrade

- Kräfte auf starren Körper

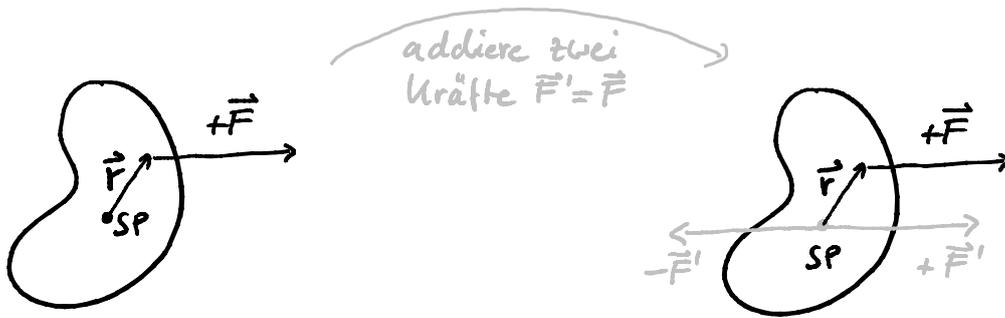
Angabe des Angriffspunkts nötig



an Schwerpunkt:

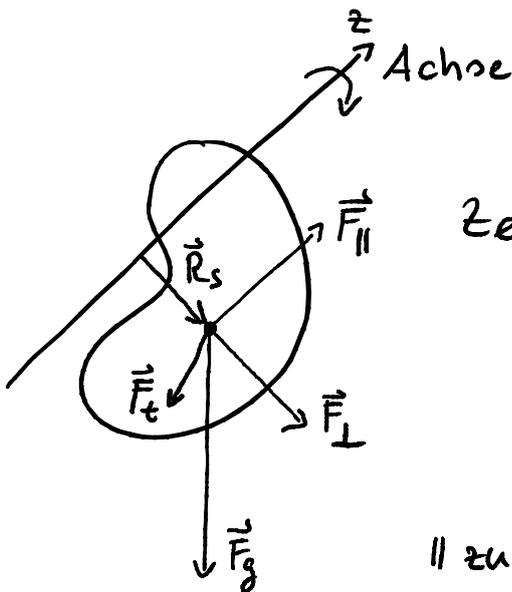
$\Rightarrow$  Beschleunigung

an anderen Punkt:



⇒ Beschleunigung ( $\vec{F}$ ) + Drehmoment ( $\vec{r} \times \vec{F}$ )

- Drehung um raumfeste Achse



Zerlegung der Gesamtkraft:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_t \quad (\text{Gewicht})$$

|| zur Achse

⊥ zur Achse

tangential zur Drehbewegung

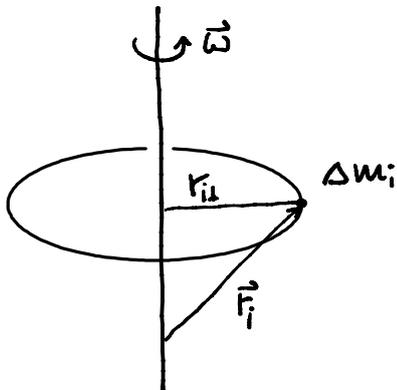
$\vec{F}_{\perp}$ : kein Drehmoment,  $\vec{R}_s \parallel \vec{F}_{\perp}$

$\vec{F}_{\parallel}$ : Drehmoment auf die Achse (raumfest, Gegenkraft)

nur  $\vec{D} = \vec{R}_s \times \vec{F}_t$  wirkt auf den Körper

- Drehimpuls, raumfeste Achse

Koordinatenursprung auf der Achse



$$\vec{L}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (\text{reine Rotation})$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i \Delta m_i \underbrace{\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{= r_{i\perp}^2 \vec{\omega}}$$

$r_{i\perp}$  = Abstand zur Achse,  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  (Beträge reichen)

$$\Rightarrow L = \omega \underbrace{\int r_{\perp}^2 \rho \, dV}_{\equiv I = \text{Trägheitsmoment}}$$

$$\boxed{L = I \omega}$$

$$[I] = \text{kg m}^2$$

- "  $\vec{p} = m\vec{v}$  " der Drehbewegung:  $I \triangleq m$
- $I$  hängt von der Wahl der Achse ab.

- Rotationsenergie, raumfeste Achse  
Koordinatenursprung auf der Achse

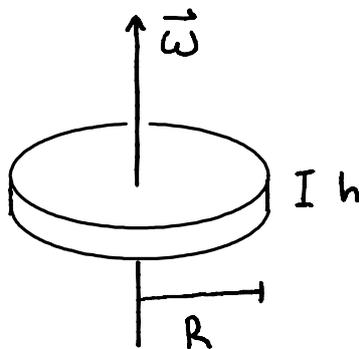
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

- "E =  $\frac{m}{2} v^2$ " der Drehbewegung

- Beispiele:

i) Scheibe:



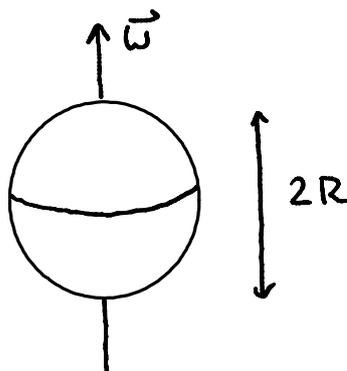
$$I = \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho r_{\perp}^2 d\varphi dz r_{\perp} dr_{\perp}$$

=  $dV$  in Zylinderkoordinaten  $(r_{\perp}, z, \varphi)$

$$= \rho 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$V = \pi R^2 h$

ii) Kugel:



$$I = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r_\perp^2 \underbrace{r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr}_{= dV \text{ in Kugelkoordinaten } (r, \vartheta, \varphi)}$$

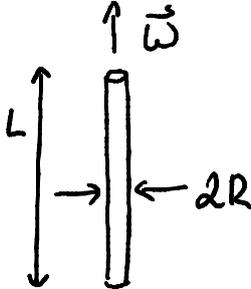
$$r_\perp = r \sin\vartheta$$

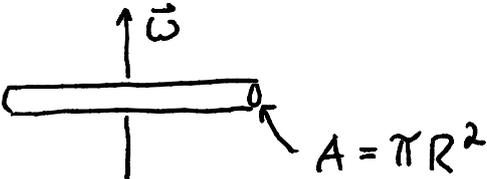
$$= 2\pi \rho \int_0^R \int_0^\pi (r \sin\vartheta)^2 r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr$$

$$= \frac{2\pi R^5 \rho}{5} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta}_{= 4/3} = \frac{2\pi R^5 \rho}{5} \frac{4}{3} = \frac{2}{5} MR^2$$

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

iii) Stab:

a)  = Scheibe:  $I_{||} = \frac{MR^2}{2}$

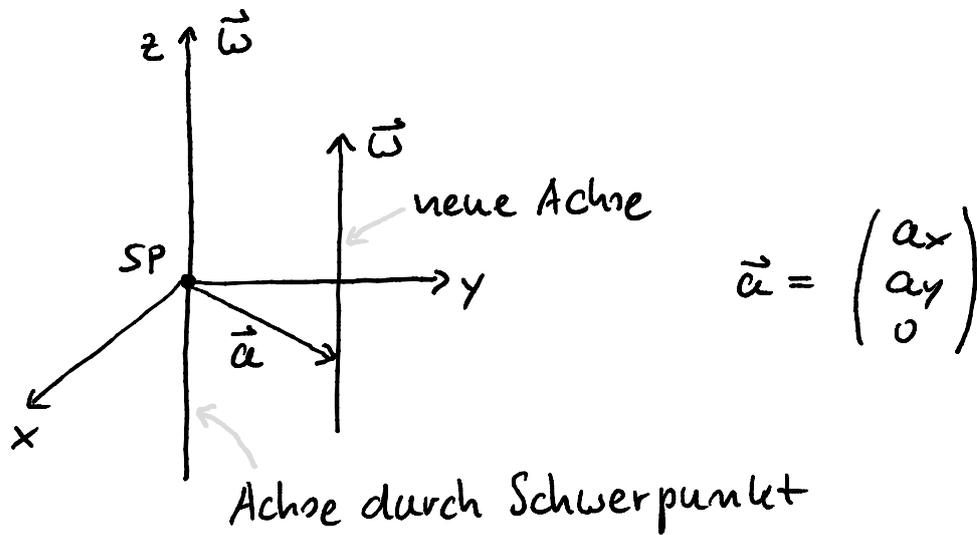
b)   $A = \pi R^2$

$$I_{\perp} \approx \rho A \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \, dx \quad R \ll L$$

$$= \rho A \frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12} \neq I_{||} \quad (I_{\perp} \gg I_{||})$$

## - Steinersche Satz

Parallellverschiebung der Achse vom Schwerpunkt



$$I_a = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV$$

$$= \int_V \rho ((x-a_x)^2 + (y-a_y)^2) dV$$

$$= \int_V \rho (x^2 + y^2) dV \quad \leftarrow I_{sp}$$

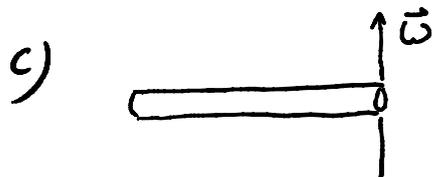
$$- 2a_x \underbrace{\int_V \rho x dx dy dz}_{=0} - 2a_y \underbrace{\int_V \rho y dy dx dz}_{=0} \quad SP!$$

$$+ (a_x^2 + a_y^2) \underbrace{\int_V \rho dV}_{=M}$$

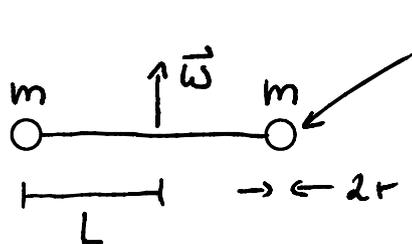
$$\Rightarrow \boxed{I_a = I_{sp} + a^2 M} \quad \text{Steinersche Satz}$$

... Beispiele

iii) Stab:

c)  
$$I = \underbrace{\frac{ML^2}{12}}_{I_{sp}} + \underbrace{\frac{L^2}{4} M}_{\alpha^2 M} = \frac{ML^2}{3}$$

iv) Gravitationswaage (Kapitel 4):

 
$$I = \frac{2}{5} m r^2$$

$$\Rightarrow I = 2m \left( L^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)$$

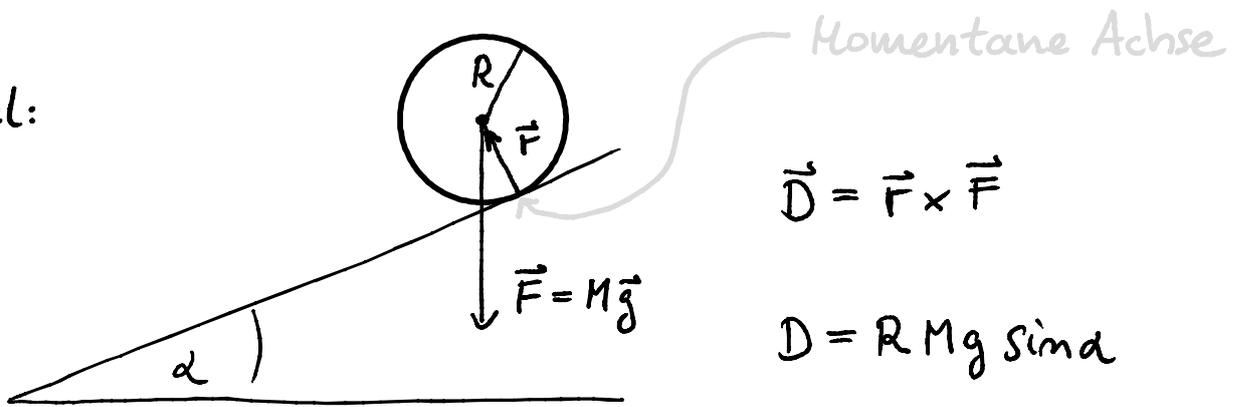
- Bewegungsgleichung der Rotation

$$D = I \dot{\omega} = I \ddot{\varphi} \quad (\stackrel{!}{=} "F = m a")$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{D}{2I} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \quad (\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 + v_0 t + x_0)$$

$\swarrow \frac{F}{m}$

Beispiel:



$$I = I_{sp} + M R^2 \quad (\text{Steiner})$$

$$\text{abgerollte Strecke } s = R \varphi \Rightarrow a = \ddot{s} = R \ddot{\varphi}$$

$$D = I \ddot{\varphi} \Rightarrow M g R \sin \alpha = (I_{sp} + M R^2) \ddot{\varphi}$$

$$a = \frac{M g R^2 \sin \alpha}{I_{sp} + M R^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_{sp} / M R^2}$$

$\Rightarrow$  Translationsbeschleunigung um Faktor  $1 + I_{sp} / M R^2$  durch Trägheitsmoment reduziert

• Vollzylinder  $I_{sp} = \frac{M R^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$

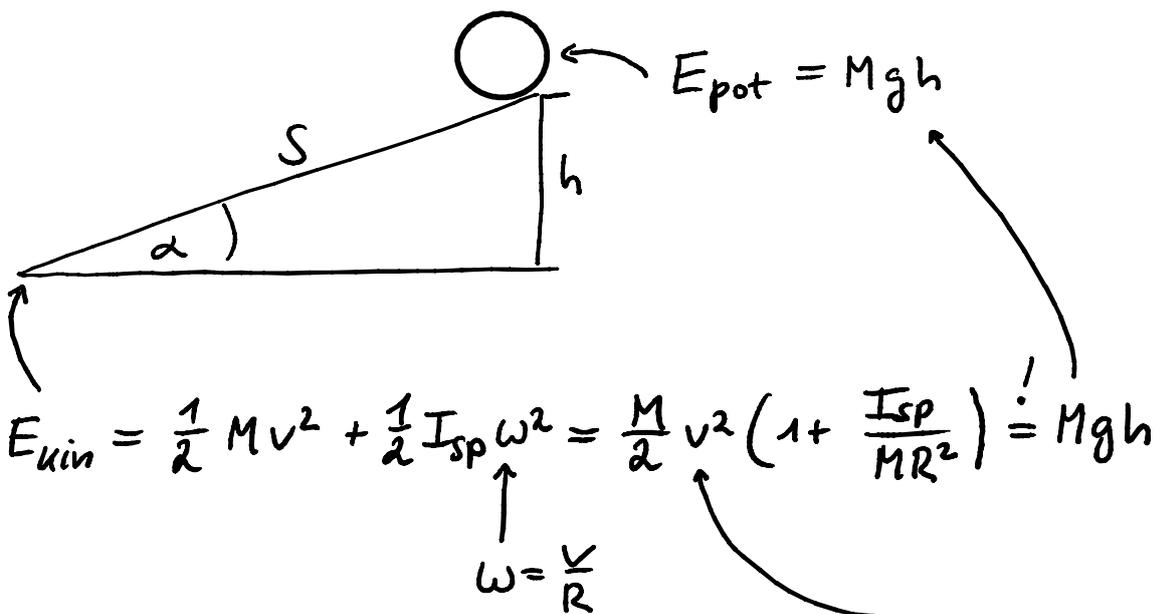
• Kugel  $I_{sp} = \frac{2 M R^2}{5} \Rightarrow a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$

• Hohlzylinder  $I_{sp} = M R^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} g \sin \alpha$



Vollzylinder rollt schneller als Hohlzylinder.  
Kugel rollt noch schneller.

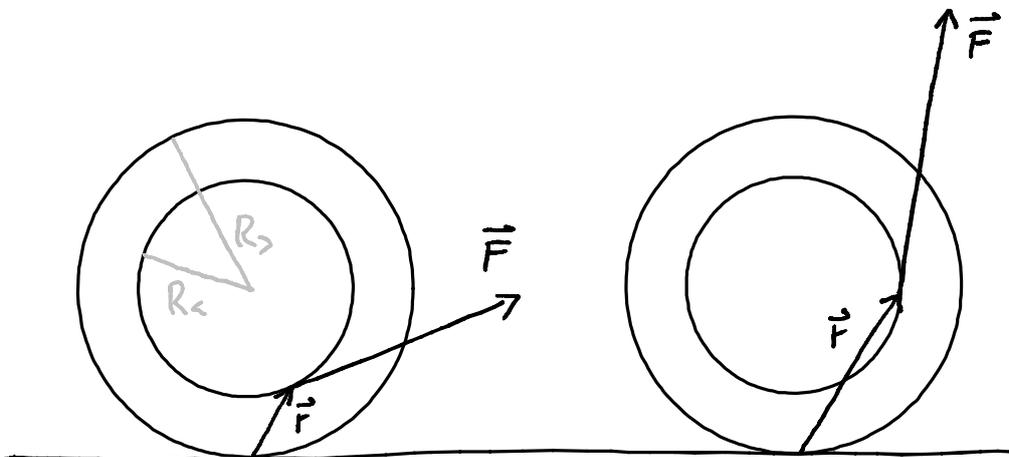
Das Gleiche mit dem Energiesatz



mit:  $v^2 = a^2 t^2$     $S = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{h}{\sin \alpha}$     $\Rightarrow v^2 = \frac{2h}{\sin \alpha} a$

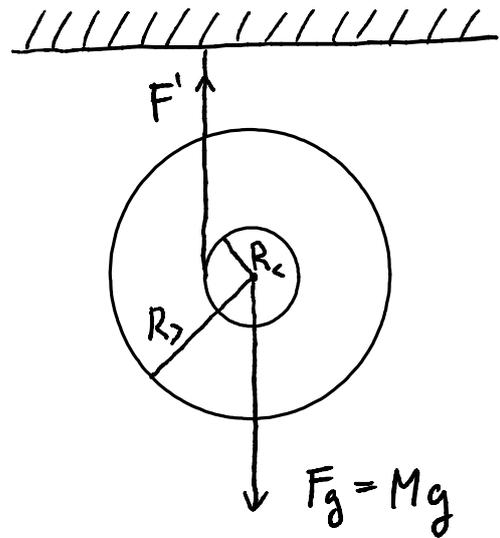
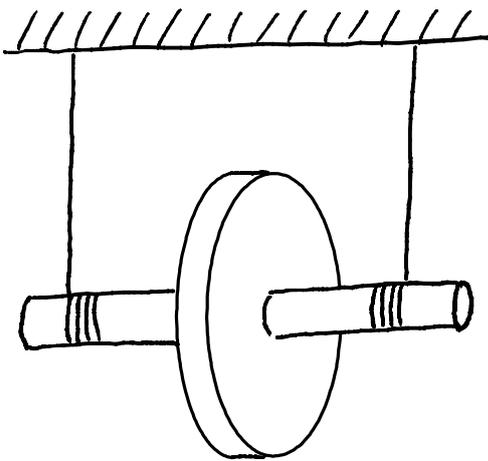
$\Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_{\text{sp}} / MR^2}$    wie gehabt.

- Drehmoment an der Zwirnrolle



Richtung des Drehmoments dreht sich um.

- Maxwell'sches Rad



$F'$  = Gegenkraft der Aufhängung

$$D = F' R_c = I \dot{\omega} = \frac{M R_s^2}{2} \dot{\omega} \quad (I_{\text{Achse}} \approx 0)$$

$$\Rightarrow F' = \frac{M R_s^2}{2 R_c} \dot{\omega} \quad (*)$$

außerdem:  $F = Ma$        $a = R_c \dot{\omega}$

$$\Rightarrow Mg - F' = Mg - \frac{M R_s^2}{2 R_c} \dot{\omega} = Ma = M R_c \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{\frac{R_s^2}{2 R_c} + R_c} = \frac{2 R_c g}{2 R_c^2 + R_s^2}$$

$a = R_c \dot{\omega}$

$$a = \underbrace{\frac{2 R_c^2}{2 R_c^2 + R_s^2}}_{< 1} g$$

$$F' = \underbrace{\frac{R_s^2}{2 R_c^2 + R_s^2}}_{< 1} Mg \quad (*)$$

Beispiele:

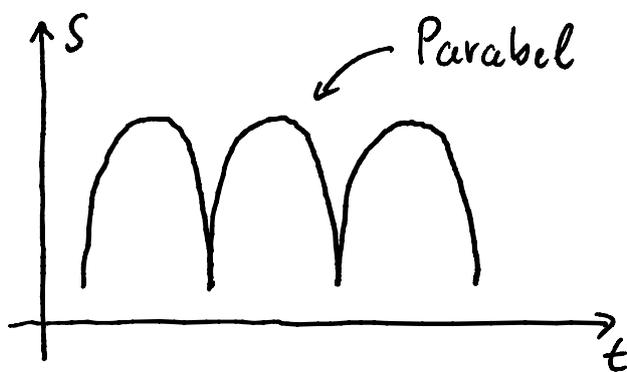
$$R_c = \frac{R_s}{10} \quad a = \frac{2(1/10)^2}{2(1/10)^2 + 1} g = 0,0196g$$

$$F' = \frac{1}{2(1/10)^2 + 1} Mg = 0,980 Mg$$

$$R_c = R_s \quad a = \frac{2}{3} g \quad F' = \frac{1}{3} Mg$$

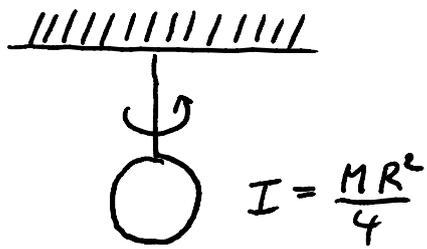
$$R_c \rightarrow 0 \Rightarrow F' = Mg \quad (\text{statisch})$$

$$R_c \rightarrow \infty \Rightarrow F' = 0 \quad (\text{freier Fall})$$

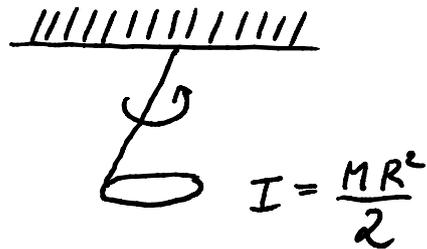


$S(t)$ : "Wurfparabel"     $F'(t)$ : Kraftstoß am Umkehrpunkt

- Kreisel: feste Achse  $\rightarrow$  bewegliche Achse



instabil



stabil

Experimentell: Rotation um die Achse mit dem größten und kleinstem Trägheitsmoment stabil.

Drehimpuls im Schwerpunktsystem:

$$\vec{L}_i = \Delta m_i (\vec{r}_{is} \times \vec{v}_{is}) = \Delta m_i (\vec{r}_{is} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is}))$$

jetzt nicht Abstand zur Achse sondern

$$\text{Graßmann Identität: } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

('BAC-CAB'-Formel)

$$= \Delta m_i (r_{is}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_{is} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_{is})$$

$$\sum_i \Delta m_i \rightarrow \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad dV = dx dy dz$$

$$\vec{L} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}) dV$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \vec{r} \cdot \vec{\omega} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$$

z.B.

$$L_x = \int_V \rho(\vec{r}) \left[ (x^2 + y^2 + z^2) \omega_x - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x \right] dV$$

$\swarrow$   $r_{\perp}^2$  für Rotation um x

$$= \omega_x \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}) (y^2 + z^2) dV}_{\equiv I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}) xy dV}_{\equiv -I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}) xz dV}_{\equiv -I_{xz}}$$

analog für  $L_y$  und  $L_z$ :

$$\Rightarrow \boxed{I_{\alpha\beta} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{\alpha\beta} - \alpha\beta) dV} \quad \alpha, \beta = x, y, z$$

Kronecker Delta:  $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

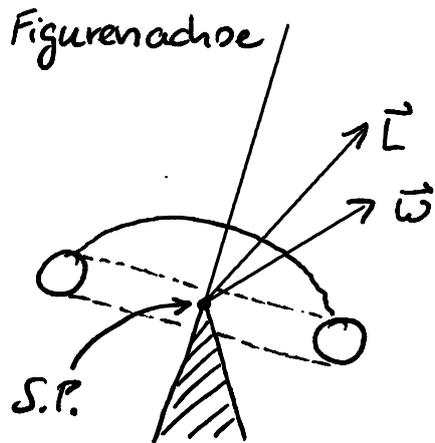
z.B.:  $I_{xx} = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV$      $I_{xy} = \int_V \rho (-xy) dV$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

oder  $\vec{L} = \hat{I} \vec{\omega}$

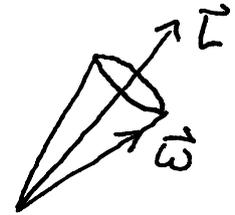
$\hat{I}$  = Trägheitstensor; i.A.  $\vec{L}$  nicht  $\parallel$  zu  $\vec{\omega}$   
(auch nicht für  $\vec{D} = 0$ )

- Kräftefreier Kreisel,  $\vec{D} = 0$



Symmetrischer Kreisel

$\vec{L}$  raumfest,  
 $\vec{\omega}$  und Figuren-  
 achse nicht:



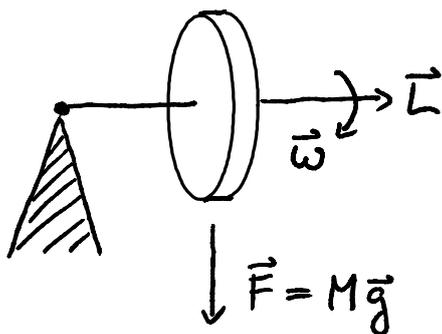
"Rastpolkegel"

Figurenachse beschreibt "Gangpolkegel"

Nutation: Drehmomentfreie Bewegung der Drehachse und Figurenachse um die Drehimpulsachse (raumfest)

- Präzession,  $\vec{D} \neq 0$

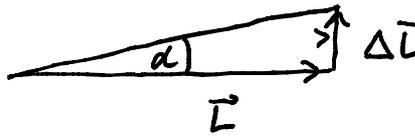
symmetrischer Kreisel  $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$  (keine Nutation) aber  $\vec{D} \neq 0$



weder Figurenachse noch  
 $\vec{\omega}, \vec{L}$  raumfest.

$$\vec{D} = \vec{F} \times \vec{r} = \dot{\vec{L}}$$

Kreisel weicht  $\perp$  zu  $\vec{L}$  und  $\vec{F}$  aus

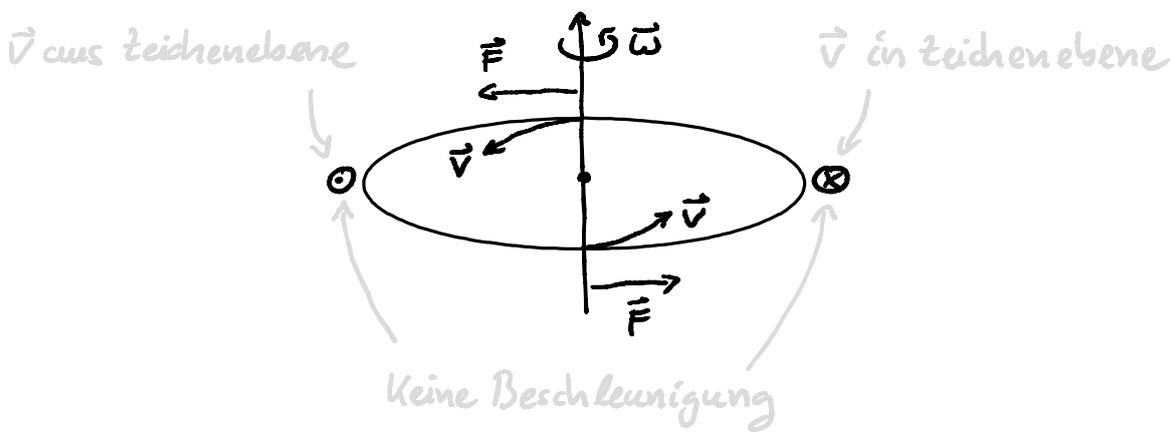
von oben:   $\vec{D} \perp \vec{L}, \vec{D} \parallel \Delta \vec{L} \Rightarrow \Delta \vec{L} \perp \vec{L}$

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{D} \quad \frac{\Delta L}{|L|} = \Delta \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{D}{L}$$

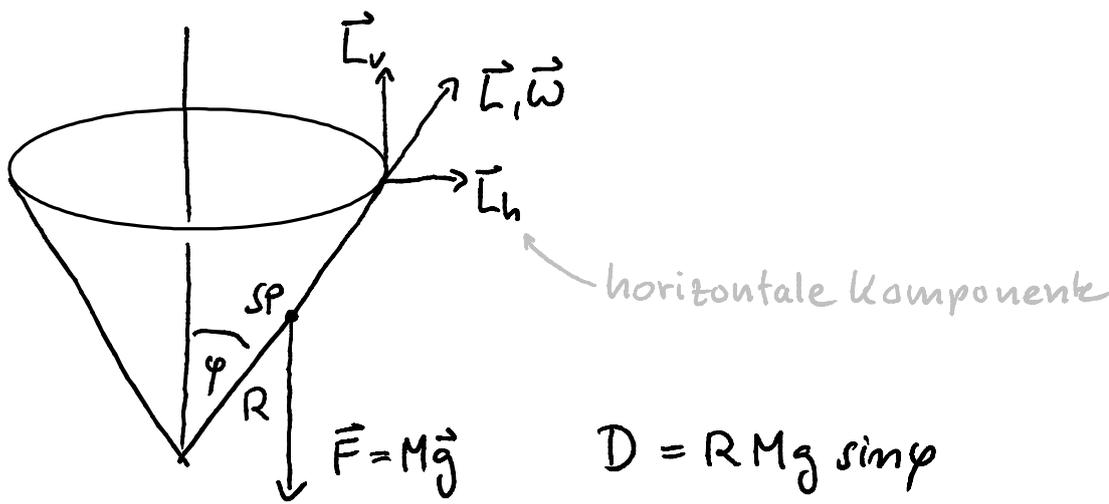
$\Omega_p = \frac{D}{L}$

Präzessionsfrequenz

- Senkrecht ausweichen mit  $\vec{F} = m\vec{a}$



- Schiefer Kreisler



$$\Omega_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{D}{L_h} = \frac{MgR \sin \varphi}{L \sin \varphi} = \frac{MgR}{L}$$

unabhängig von  $\varphi$

Präzession: Bewegung des Drehimpulsvektors, der Figuren- und Drehachse unter dem Einfluss eines Drehmoments.

## - Euler Gleichungen

Im Körperfesten Koordinaten kann  $\hat{I}$  diagonalisiert werden: Hauptachsen transformation

$$\Rightarrow I_k = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

$I_a \neq I_b \neq I_c$  asymmetrischer Kreisel (z.B. Zigarrenkiste)

$I_a = I_b \neq I_c$  symmetrischer Kreisel (z.B. Scheibe)

Bewegungsgleichung (Kapitel 5):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{D}$$

$$\vec{D} = D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y + D_z \vec{e}_z = D_a \vec{e}_a + D_b \vec{e}_b + D_c \vec{e}_c = \vec{D}$$

(Laborsystem)                      (Körpersystem)

Komponenten im Körpersystem, z.B. a-Komponente:

$$D_a = \frac{d' L_a}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L})_a = \frac{d'}{dt} (I_a \omega_a) + (\omega_b L_c - \omega_c L_b)$$

$$= I_a \dot{\omega}_a + \omega_b I_c \omega_c - \omega_c I_b \omega_b$$

$$\left( \begin{array}{l} I_a = \text{const} \\ \frac{d'}{dt} = \text{Ableitung der Komponente } \omega_a \end{array} \right.$$

$\frac{d'}{dt}$  = Ableitung der Komponente  $\omega_a$

b, c Komponente analog:

$$\begin{aligned} I_a \dot{\omega}_a + (I_c - I_b) \omega_c \omega_b &= D_a \\ I_b \dot{\omega}_b + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c &= D_b \\ I_c \dot{\omega}_c + (I_b - I_a) \omega_b \omega_a &= D_c \end{aligned}$$

Euler  
Gleichungen

Im Allgemeinen kompliziert, selbst wenn Komponenten von  $\vec{D}$  bekannt im Laborsystem, lassen sich  $D_a$ ,  $D_b$  und  $D_c$  erst nach dem Lösen angeben!

⇒ meist chaotisches Verhalten, außer....

# i) Kräftefreier symmetrischer Kreisel: Nutation

$$\vec{D} = 0, \quad I_a = I_b \quad \Rightarrow \quad c = \text{Figurenachse}$$

$$\dot{\omega}_a + \left( \frac{I_c - I_a}{I_a} \omega_c \right) \omega_b = 0$$

$$\dot{\omega}_b - \left( \frac{I_c - I_a}{I_a} \omega_c \right) \omega_a = 0$$

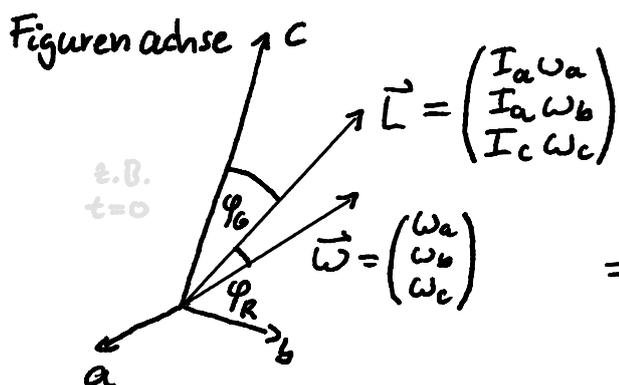
$$\dot{\omega}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega \equiv \frac{I_c - I_a}{I_a} \omega_c = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_a + \Omega \omega_b = 0 \quad \dot{\omega}_b - \Omega \omega_a = 0$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= A \sin(\Omega t) \\ \omega_b &= A \cos(\Omega t) \\ \omega_c &= C \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Nutation (im Körpersystem)} \\ A, C \text{ aus Anfangsbedingungen} \end{array}$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{A^2 + C^2} = \text{const}$$



Vergl. Skizze des "Kräftefreier Kreisel"

$\Rightarrow \vec{L}, \vec{\omega}$  und  $c$  stets in einer Ebene

- im körperfesten System drehen sich  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  um  $c$ .
- im raumfesten System drehen sich  $c$  und  $\vec{\omega}$  um  $\vec{L}$ :

$$\text{Gangpolkegel: } \tan \varphi_G = \frac{I_a \omega_b(t=0)}{I_c \omega_c} = \frac{I_a A}{I_c C}$$

z.B.  $t=0$

$$\text{Rastpolkegel: } \tan \varphi_R = \frac{\omega_b(t=0)}{\omega_c} = \frac{A}{C}$$

ii) Kräftefreier unsymmetrischer Kreisel

$$\vec{D} = 0, \quad I_a \neq I_b \neq I_c$$

wann gilt  $\dot{\vec{\omega}} = 0$  (stabile Achse)?

falls:

$$(I_c - I_b) \omega_c \omega_b = 0$$

$$(I_a - I_c) \omega_a \omega_c = 0$$

$$(I_b - I_a) \omega_b \omega_a = 0$$

$\Rightarrow$  zwei der drei Komponenten  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  müssen Null sein.  
d.h.  $\dot{\vec{\omega}} = 0$  nur für Rotation um eine Hauptachse.

Stabilität? Wie reagiert ein um die a-Achse rotierender Kreisel auf eine kleine Störung?

$$\left. \begin{array}{l} \omega_b(t) = \varepsilon_b(t) \\ \omega_c(t) = \varepsilon_c(t) \end{array} \right\} \ll \omega_a \approx \text{const}$$

$$\Rightarrow I_a \overset{\approx 0}{\dot{\omega}_a} - (I_c - I_b) \overset{\approx 0}{\varepsilon_c(t)} \varepsilon_b(t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} I_b \dot{\varepsilon}_b(t) - (I_a - I_c) \omega_a \varepsilon_c(t) = 0 \\ I_c \dot{\varepsilon}_c(t) - (I_b - I_a) \varepsilon_b(t) \omega_a = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{gekoppeltes System} \\ \text{1. Ordnung} \end{array}$$

$\Rightarrow$  entkoppeltes System 2. Ordnung:

$$\ddot{\varepsilon}_b(t) + \alpha \varepsilon_b(t) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon}_c(t) + \alpha \varepsilon_c(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv \frac{(I_a - I_c)(I_a - I_b)}{I_b I_c} \omega_a^2$$

$$\text{Lösung: } \varepsilon_{b,c}(t) \sim e^{\pm i\sqrt{\alpha} t}$$

- $\alpha > 0 \Leftrightarrow I_a$  ist das größte oder kleinste Moment.

$$\text{reelle Lösungen } \varepsilon_{b,c}(t) \sim \begin{cases} \sin(\sqrt{\alpha} t) \\ \cos(\sqrt{\alpha} t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Störung oszilliert, aber wächst nicht.

- $\alpha < 0 \Leftrightarrow I_a$  ist das mittlere Moment.

$$\Rightarrow \varepsilon_{b,c}(t) \sim \varepsilon_{b,c}(0) e^{\pm \gamma t} \quad \gamma \equiv \sqrt{-\alpha} \text{ reell}$$

eine der beiden Lösungen "+" (für  $\gamma > 0$ )

oder "-" (für  $\gamma < 0$ ) wächst exponentiell.

$\Rightarrow$  entsprechende Störung wächst exponentiell

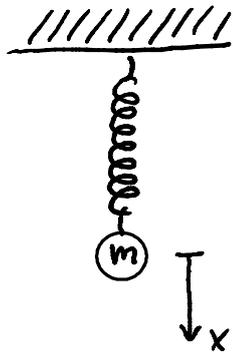
$\Rightarrow$  rotation "mathematisch" ( $\Sigma = 0$ ) stabil

aber nicht in der Realität (physikalisch).

$\Rightarrow$  Stabile Rotation nur um die Achsen mit größtem und kleinstem Trägheitsmoment.

## 9. Harmonischer Oszillator

harmonische Schwingungen (sinus-förmig)



$$F = -Dx = ma = m\ddot{x}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Lösungsansatz:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

Einsetzen:  $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = 0 \quad \checkmark$

geht auch mit  $x(t) = B \sin(\omega_0 t)$

und  $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Allgemeine Lösung  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

oder  $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$

umrechnen:  $A = C \sin \varphi$ ,  $B = C \cos \varphi$

Anpassung der Konstanten  $A, B$  (oder  $C, \varphi$ ) an Anfangsbedingungen, z.B.  $x(t=0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t=0) = v_0$

- Komplexe Schreibweise

$$e^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{Taylor: } f^{(n)}(x=0) = 1 \quad \forall n)$$

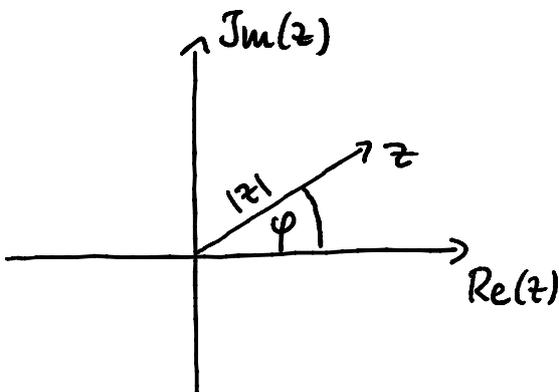
Euler Formel:  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$   $i = \sqrt{-1}$

Beweis: 
$$e^{i\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}}_{=\cos \alpha} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\sin \alpha}$$

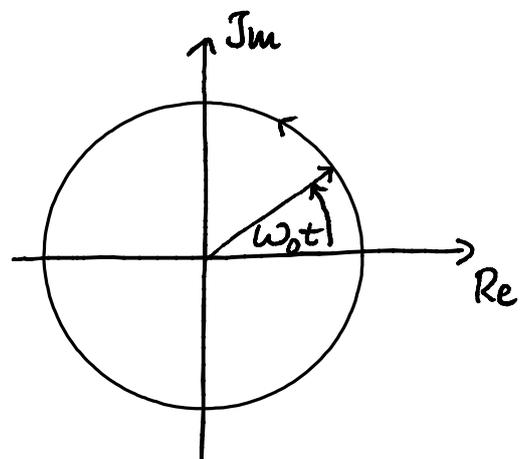
$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$

auch:  $\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$   $\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$



$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$$

$$z = |z| e^{i\varphi}$$



Oszillation  $\hat{=}$  Rotation in  $\phi$

Komplexer Lösungsansatz:

$$x(t) = c e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = c \lambda^2 e^{\lambda t}$$

eingesetzt:  $c \lambda^2 e^{\lambda t} + c \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda = \pm i \omega_0$$

allgemeine komplexe Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{i \omega_0 t} + c_2 e^{-i \omega_0 t}$$

reell für  $c_2 = c_1^*$ :  $x(t) = c_1 e^{i \omega_0 t} + c_1^* e^{-i \omega_0 t}$

$$= 2 \operatorname{Re}(c_1 e^{i \omega_0 t}) = 2 \operatorname{Re}(|c_1| e^{i \varphi + i \omega_0 t})$$

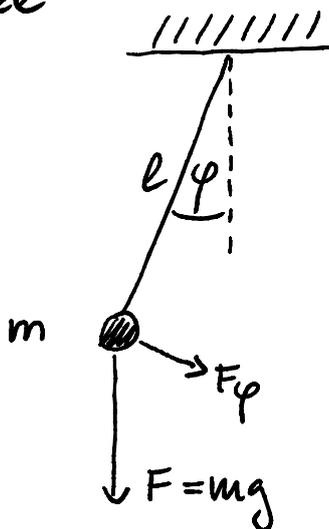
$$= 2 |c_1| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(c_1)}{\operatorname{Re}(c_1)}$$

Rezept: Alle Rechnungen in  $\phi$  durchführen  
am Ende  $\operatorname{Re}$  oder  $\operatorname{Im}$  verwenden.

– Andere harmonische Oszillatoren

i) Pendel



$$F_\varphi = -mg \sin \varphi = ma = m l \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

nicht "analytisch" lösbar

für kleine Winkel  $\varphi \ll 2\pi$

$$\sin \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$\sin \varphi \approx \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{Sekundenpendel } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2s \text{ für } l = 0,994m$$

ii) Torsionspendel

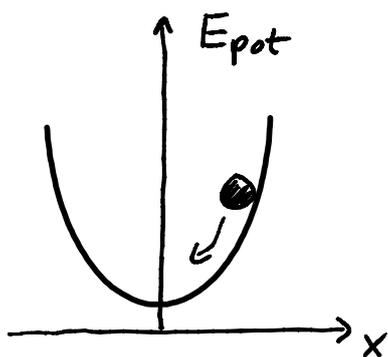
$$D = \dot{L} = I \dot{\omega} = I \ddot{\varphi}$$

$$\text{Rückstellmoment: } D = -D_R \varphi$$

Winkelrichtgröße

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D_R}{I}}$$

– Oszillationen um Potentialminimum



$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D x^2$$

$$F = -Dx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

lineare Rückstellkraft

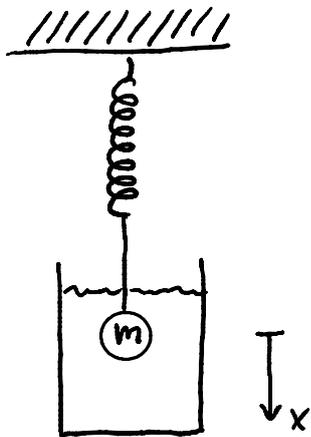
( $\Leftrightarrow$ ) quadratisches Potential

( $\Leftrightarrow$ ) harmonische Oszillation

• Energie:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) \Rightarrow v(t) = \dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \\ &= A^2 \frac{m \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) + A^2 \frac{m \omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t) \\ &= A^2 \frac{m \omega_0^2}{2} = \text{const.} \end{aligned}$$

- gedämpfter Oszillator



Reibungskraft Stokes:  $F_R = -b v$

$$F = -Dx - b \dot{x} = ma = m \ddot{x}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$

Lösungsansatz:  $x(t) = c e^{\lambda t}$

$$\text{Einsetzen: } c \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma c \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 c e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

i) schwache Dämpfung  $\gamma < \omega_0$

$\Rightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  rein imaginär

besser:  $i\omega_d \equiv i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

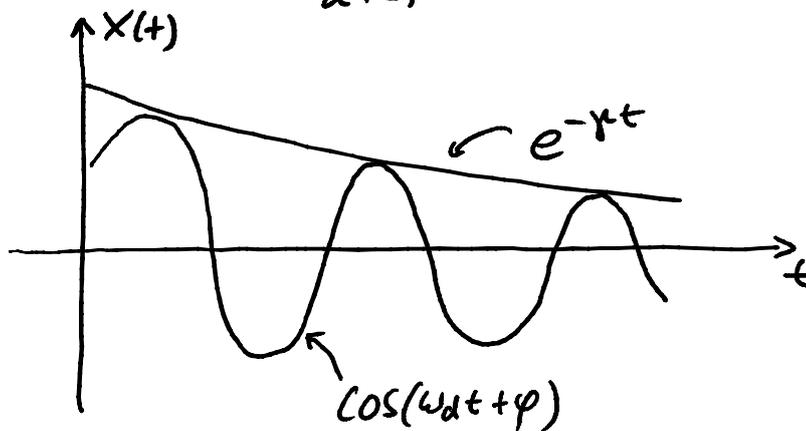
$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (c e^{i\omega_d t} + c^* e^{-i\omega_d t})$$

$$= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

$2|c|$

$$c = |c| e^{i\varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)}$$



$$\text{Periode: } T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$$

gedämpfter Oszillator schwingt etwas langsamer

Energieverlust: Dämpfung  $A \rightarrow A e^{-\gamma t}$

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = A^2 e^{-2\gamma t} \frac{m\omega_0^2}{2} \neq \text{const.}$$

Abfall auf  $\frac{1}{e}$  der Anfangsenergie nach  $t = T = \frac{1}{2\gamma}$

in Einheiten von T:

$$\frac{T}{T} = \frac{\omega_d T}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_d}{\omega_0} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad \gamma \ll \omega_0$$

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

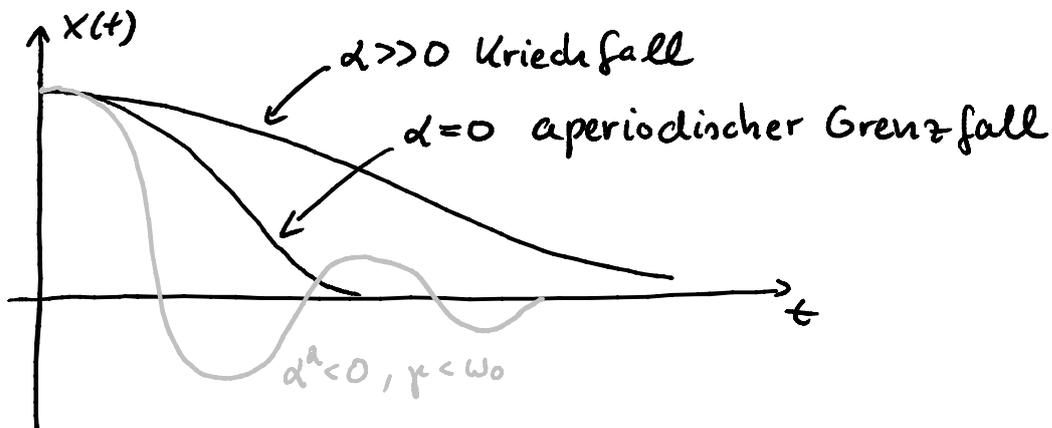
Güte des Oszillators (Quality)

$Q$  = Anzahl der Schwingungen ( $\times \pi$ ) bis Energie dissipiert ist.

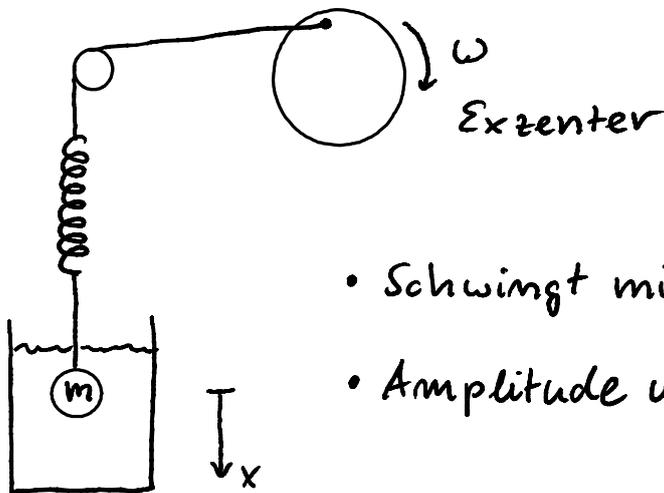
ii) starke Dämpfung  $\gamma \geq \omega_0$

$\Rightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv \alpha$  reell keine Oszillation

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$$



- Erzwungene Schwingung



- Schwingt mit anregender Frequenz  $\omega$
- Amplitude und Phase  $\omega$  abhängig

$$F = -Dx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m a = m \ddot{x}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = k \cos \omega t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad k = \frac{F_0}{m}$$

inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

Lösung = homogene Lösung ( $F_0=0$ )

+ inhomogene Lösung ( $F_0 \neq 0$ )

$$x(t) = \underbrace{A_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \varphi_1)}_{\text{Einschwingung} \rightarrow 0} + \underbrace{A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))}_{\text{Ansatz}}$$

Einschwingung  $\rightarrow 0$

Ansatz

Komplexer Ansatz einfacher:  $x(t) = A(\omega) e^{i\omega t}$

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{Im } A(\omega)}{\text{Re } A(\omega)}$$

$$\text{in } \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = k e^{i\omega t} \quad \leftarrow \text{komplexe Kraft}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) A(\omega) e^{i\omega t} = k e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(\omega) = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}}$$

Amplitude und  
Phase der erzwungenen  
Schwingung

## i) Amplitude

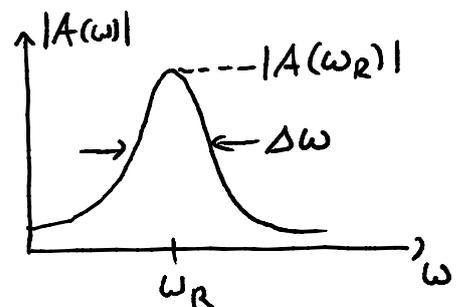
$$\begin{aligned} |A(\omega)|^2 &= A(\omega) A^*(\omega) \\ &= \frac{k^2}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega)((\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega)} \\ &= \frac{k^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \end{aligned}$$

Anmerkung: Wird oft nur für  $\omega \approx \omega_0$  benötigt

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx \underbrace{2\omega_0}_{\approx 2\omega_0} (\omega_0 - \omega)$$

$$\Rightarrow |A(\omega)|^2 \approx \frac{1}{4\omega_0^2} \underbrace{\frac{k^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\gamma)^2}}_{\text{Lorentzkurve}}$$

$$|A(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$



• Maximum der Amplitude = Minimum des Nenners

$$\frac{\partial}{\partial \omega} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\gamma^2\omega \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \quad \text{Resonanzfrequenz } (\neq \omega_d)$$

für schwache Dämpfung  $\gamma \ll \omega_0$ :  $\omega_0 \approx \omega_d \approx \omega_R$

• Resonanzamplitude

$$\begin{aligned} |A(\omega = \omega_R)| &= \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma^2)^2 + (2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2})^2}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{4\gamma^4 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} = \frac{k}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{k}{2\gamma\omega_d} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |A(\omega = \omega_R)| \rightarrow \infty$  für  $\gamma \rightarrow 0$

Resonanzkatastrophe!

• Halbwertsbreite für  $\gamma \ll \omega_0$

suche  $\omega$  für welches sich  $|A(\omega)|^2$  auf  $1/4$  des Resonanzwerts reduziert:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2 &\stackrel{!}{=} 4((\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + (2\gamma\omega_R)^2) = 4(4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4) \\ \uparrow & \qquad \qquad \qquad \uparrow & \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \approx (2\omega_0(\omega_0 - \omega))^2 & \approx (2\gamma\omega_0)^2 & \approx 16\gamma^2\omega_0^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2 + (4\gamma^2\omega_0^2) \approx 16\gamma^2\omega_0^2$$

$$\Rightarrow (\omega_0 - \omega)^2 \approx 3\gamma^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\omega \approx 2\sqrt{3}\gamma}$$

Halbwertsbreite für  $\gamma \ll \omega_0$   
FWHM

↖ "full width of half maximum"

Anmerkung: Lorentz  $\frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2}$

$$\Gamma = 4\gamma = \text{FWHM (exakt)}$$

ii) Phase

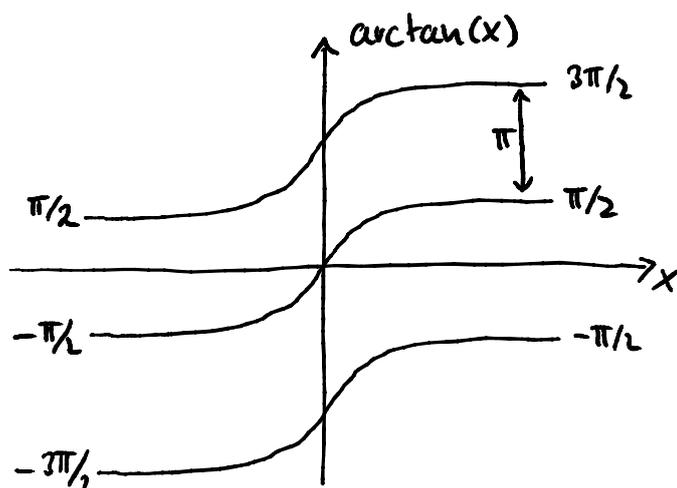
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(A(\omega))}{\text{Re}(A(\omega))}\right)$$

mit komplex konjugierten  
Nenner erweitern

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = k \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Problem: arctan nur modulo  $\pi$ :



$\varphi(\omega)$  stetig:

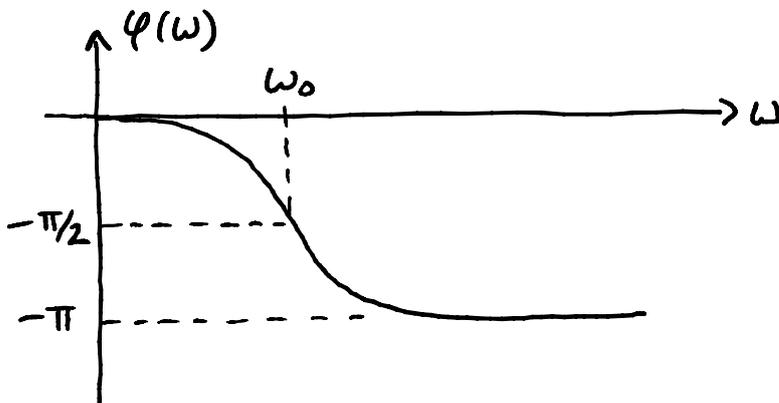
- $\varphi(\omega=0) = \arctan(0) = 0$

Oszillator folgt für  $\omega \ll \omega_0$  quasi statisch:  $\varphi = 0$

- $\varphi(\omega=\omega_0) = \arctan(-\infty) = -\pi/2$

- $\varphi(\omega \rightarrow \infty) = \arctan(0) = 0 - \pi$

stetig!



iii) Energiebilanz (reell)

$$m \ddot{x} + D x = -b \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) \quad | \cdot \dot{x}$$

$$m \dot{x} \ddot{x} + D x \dot{x} = -b \dot{x}^2 + F_0 \cos(\omega t) \dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{D}{2} x^2}_{\text{Gesamtenergie}} \right) = -b \dot{x}^2 + F_0 \cos(\omega t) \dot{x}$$

Gesamtenergie = const (eingeschwungen)

$$\Rightarrow b \dot{x}^2 = F_0 \cos(\omega t) \dot{x}$$

Leistung der Reibung

Leistung der treibenden Kraft  $\vec{F} \cdot \vec{v}$   
(Kapitel 3)

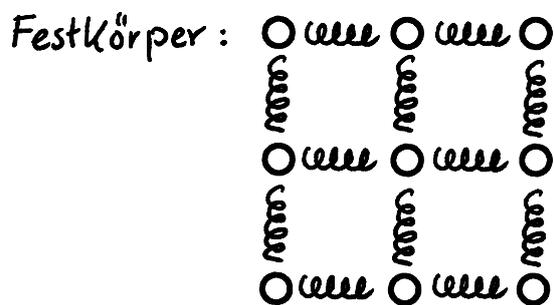
$$\dot{x}(t) = -|A(\omega)|\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

über Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  gemittelte Leistung:

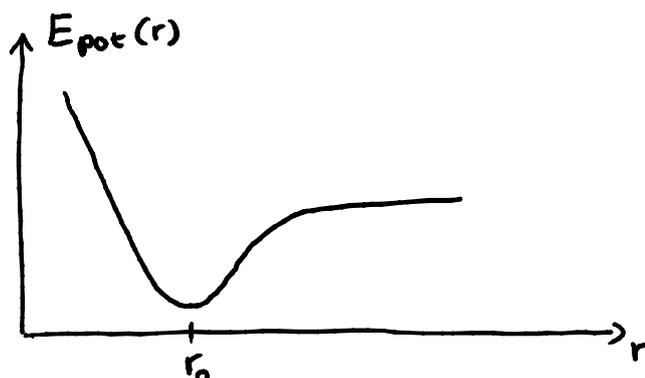
$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T Fv dt = - \frac{|A(\omega)|\omega F_0}{2\pi/\omega} \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) dt}_{= \pi \sin \varphi}$$

maximal bei  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , d.h. bei Resonanz

## 10.) Elastizitätslehre, Festkörper



Gleichgewichtslage  $\Rightarrow$  Potentialminimum



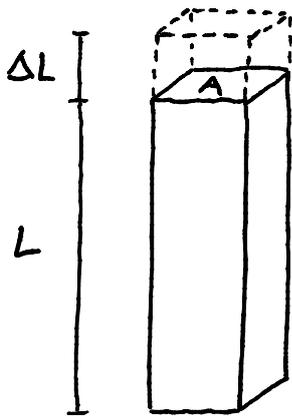
$$E_{\text{pot}}(r) = E_{\text{pot}}(r_0) + E'_{\text{pot}}(r_0)(r-r_0) + \frac{1}{2} E''_{\text{pot}}(r_0)(r-r_0)^2 + \dots$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 Konstante              = 0 (Minimum)

$$\text{Kraft: } F = \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial r} = E''_{\text{pot}}(r-r_0) + \dots$$

⇒ Hook'sches Gesetz:  $F = -D_F(r-r_0)$

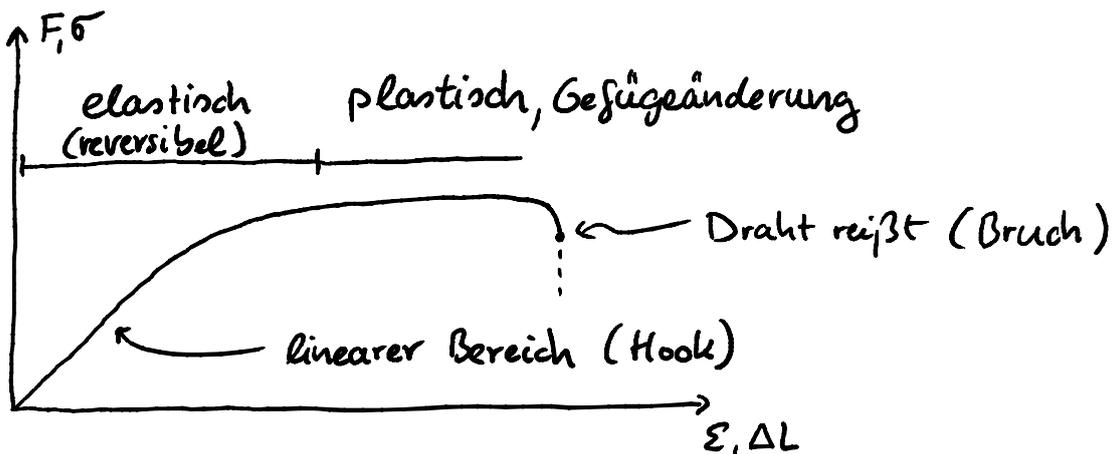
- Dehnung



Normalspannung  $\sigma \equiv \frac{F_n}{A} \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

⇒ Dehnung  $\varepsilon \equiv \frac{\Delta L}{L}$

• "ZerreiBmaschiene" 



Hook :

$$\sigma \equiv E \epsilon$$

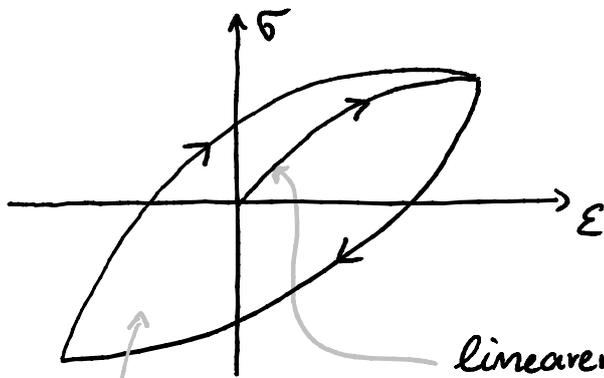
$E =$  Elastizitätsmodul

• Beispiele:

	$E \left[ 10^9 \frac{N}{m^2} \right]$	Zugfestigkeit $\left[ 10^6 \frac{N}{m^2} \right]$
Stahl	200	520
Beton	23	2 (Stahlbeton)
Kupfer	125	200
Carbon Nanotubes	1300	14000
Spinnenmetz		450-1970

↙ Bruch

• Korrekturen, Hysterese, plastische Verformung



$$F = A\sigma, \quad dL = Ld\epsilon$$

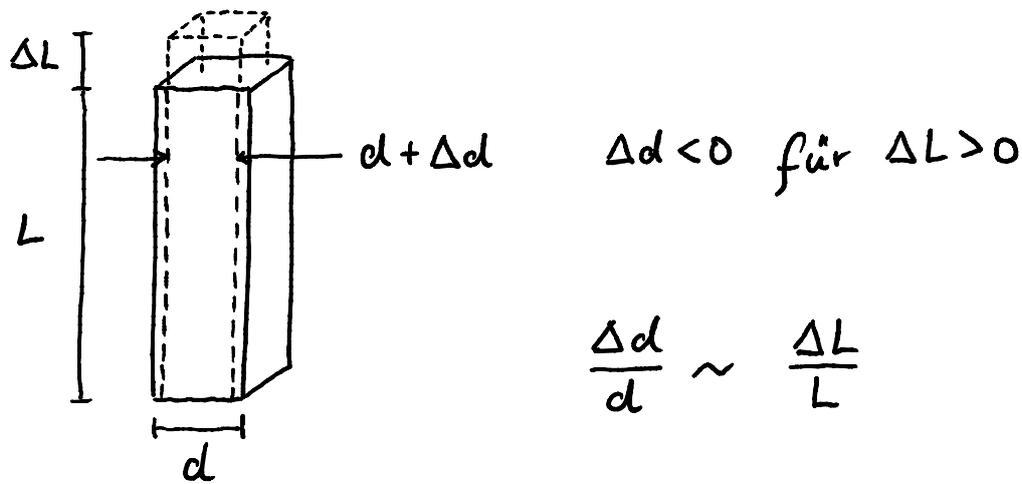
linearer Bereich:

$$W_{elast} = \int_0^{\Delta L} F dL = AL \int_0^{\Delta \epsilon} \sigma(\epsilon) d\epsilon$$

$$W_{plast} = AL \oint \sigma(\epsilon) d\epsilon = \text{Wärme}$$

Energieumsatz = Fläche der Hysterese Kurve

## - Querkontraktion



$\Rightarrow$   $\mu \equiv - \frac{\Delta d/d}{\Delta L/L}$  Querkontraktionszahl  
auch Poissonzahl

- Volumenänderung durch Zug:

$$\Delta V = (d + \Delta d)^2 (L + \Delta L) - d^2 L$$

$$= (d^2 + 2d\Delta d + \Delta d^2)(L + \Delta L) - d^2 L$$

$$\approx \cancel{d^2 L} + 2dL\Delta d + d^2\Delta L - \cancel{d^2 L} \quad (\Delta d \Delta L \approx 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

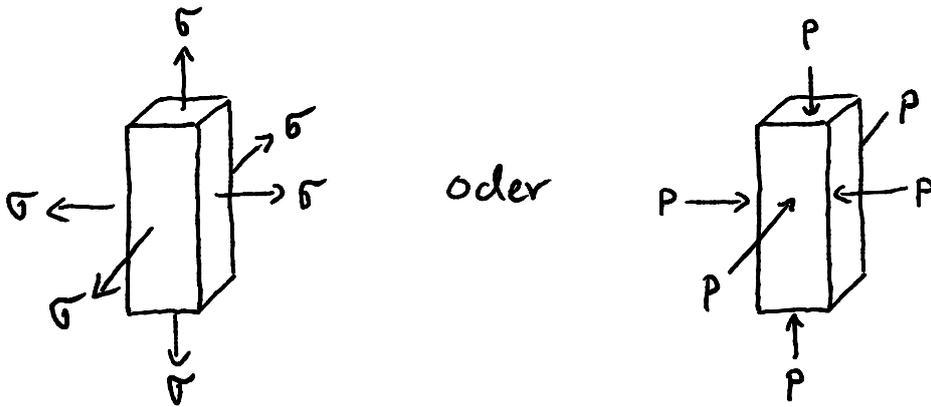
$\mu < 0,5$ : Volumen vergrößert sich unter Zug

$\mu > 0,5$ : Volumen verringert sich unter Zug

• Beispiele :

	$\mu$
Stahl	0,27 - 0,30
Kupfer	0,25
Gummi	0,50
Kork	0,00

• Volumenänderung durch allseitigen Druck  $p = -\sigma$



$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} - 2 \frac{\Delta d}{d} \mu = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

$\frac{\sigma}{E}$   
 ↑  
 longitudinale Dehnung

$2 \times \frac{\Delta d}{d} \mu$   
 ↑  
 2x Längen Querkontraktion

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\sigma}{E} - \frac{\Delta d}{d} \mu - \frac{\Delta L}{L} \mu = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} = 3 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

↑  
 all (3) seitig

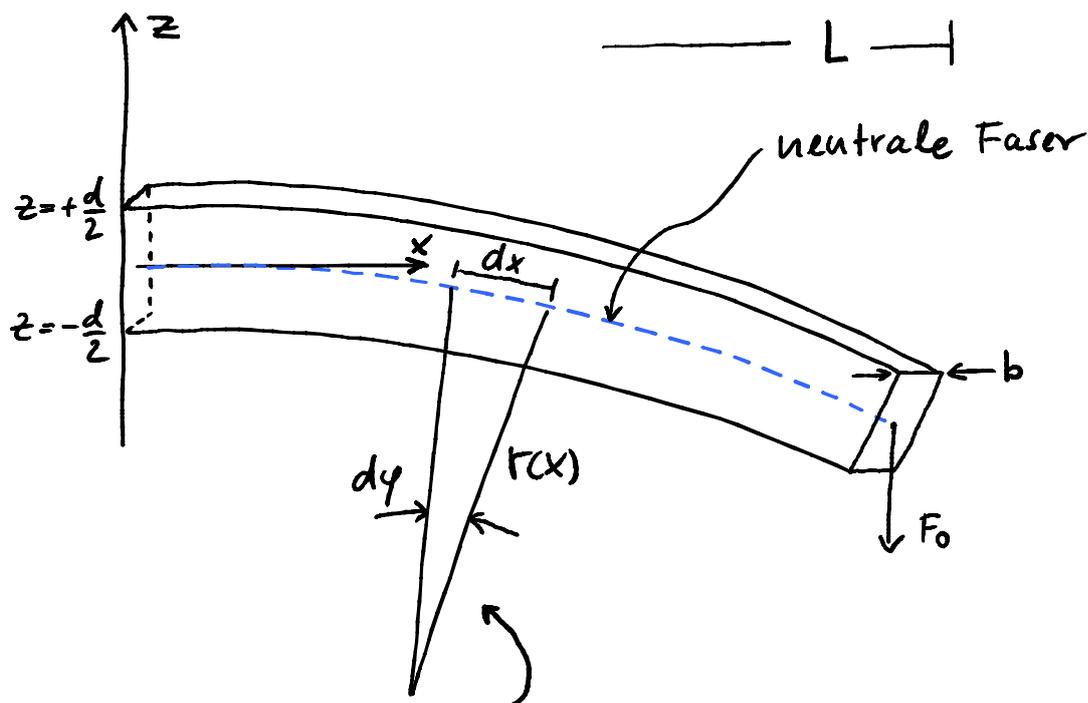
bzw.  $-3 \frac{p}{E} (1 - 2\mu)$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{3(1-2\mu)}{E} \quad \text{Kompressibilität}$$

$$\text{auch } \kappa \equiv \frac{1}{\alpha} \quad \text{Kompressionsmodul}$$

$$\text{d.h. } \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \alpha \sigma \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta V}{V} = -\alpha p}$$

- Anwendung Balkenbiegen



Lokale Beschreibung durch den Krümmungsradius  $r(x)$

$$\text{relative Dehnung: } \varepsilon = \frac{(r(x)+z)dy - r(x)dy}{dx}$$

$$= z \frac{dy}{dx} = \frac{z}{r(x)} = \frac{\sigma}{E}$$

↑  
 $dx = r dy$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{zE}{r(x)}$$

$$\text{Andererseits: } \sigma = \frac{F}{A} = \frac{1}{b} \frac{dF}{dz} \Rightarrow dF = \frac{bE}{r(x)} z dz$$

$$\text{Drehmoment: } dD_y = z dF = \frac{bE}{r(x)} z^2 dz$$

$$D_y = \frac{bE}{r(x)} \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 dz = \frac{bE d^3}{12 r(x)}$$

Wird kompensiert durch Drehmoment  $F_0(L-x)$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{r(x)} = \frac{12 F_0}{b E d^3} (L-x) \equiv a (L-x)$$

$$z''(x) \approx -\frac{1}{r(x)} \quad (\text{2. Ableitung} \approx \text{inverser Krümmungsradius})$$

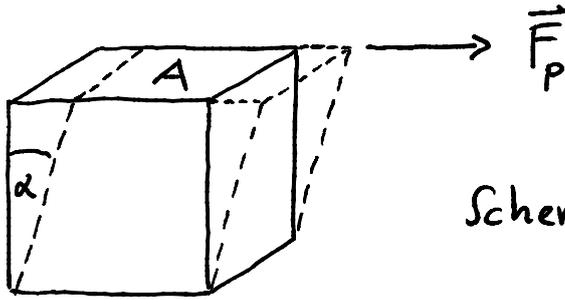
$$\Rightarrow z(x) = \frac{a}{6} x^3 - \frac{aL}{2} x^2 \quad \text{mit } z(x=0) = z'(x=0) = 0$$

↑  
Form der neutralen Faser.

Krümmung nimmt linear mit  $x$  ab.

$$\text{Biegung: } |z(x=L)| = aL^3 \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| = \frac{aL^3}{3} = \frac{4F_0}{bE} \left( \frac{L}{d} \right)^3$$

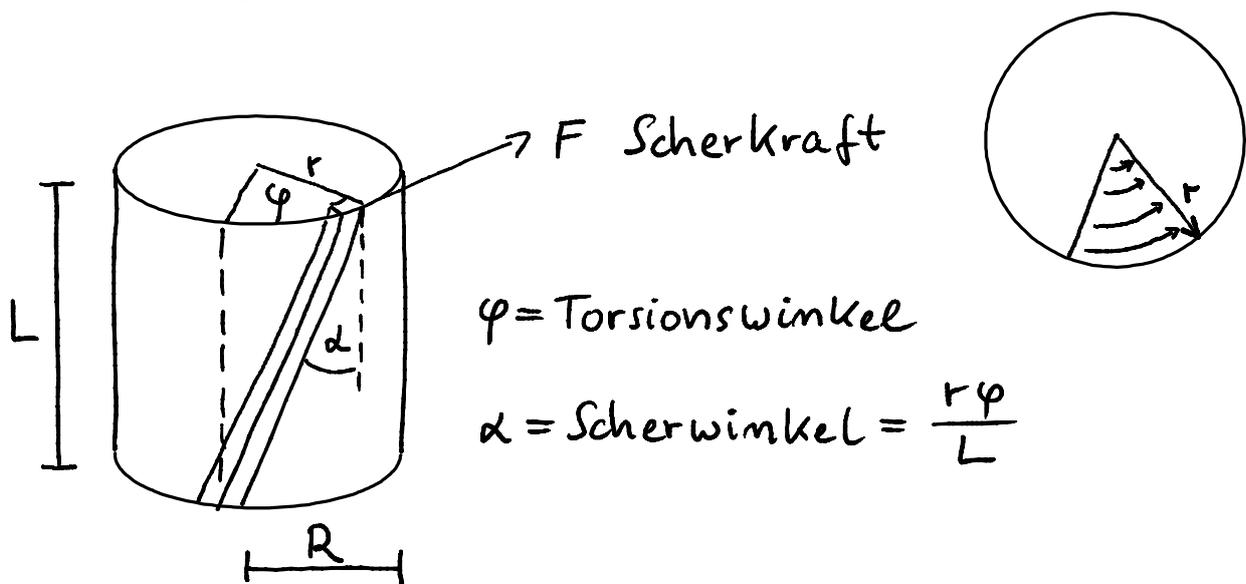
## - Scherung



$$\text{Scherspannung } \tau \equiv \frac{F_P}{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau \equiv G \alpha} \quad G = \text{Schermodul}$$

## - Anwendung Torsion



$\varphi = \text{Torsionswinkel}$

$$\alpha = \text{Scherwinkel} = \frac{r\varphi}{L}$$

$$\tau = G\alpha = G \frac{r\varphi}{L}$$

$$dF = \tau \underbrace{(2\pi r dr)}_{dA} = G \frac{r\varphi}{L} (2\pi r dr)$$

$$\text{Drehmoment: } dD = r dF = 2\pi G r^3 \frac{\varphi}{L} dr$$

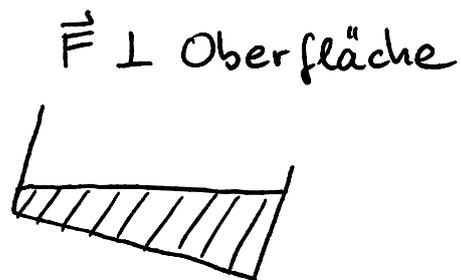
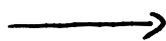
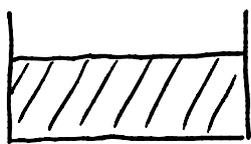
$$\Rightarrow D = \frac{2\pi G \varphi}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi G \varphi}{L} \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{\pi G \varphi}{2L} R^4 \equiv D_R \varphi} \quad \begin{array}{l} \sim R^4 \\ \sim \frac{1}{L} \end{array}$$

- $D_R$  = Winkelrichtgröße
- lange und dünne Drähte können kleines Drehmoment messen (Gravitationswaage)

## 11. Flüssigkeiten und Fluide

zunächst Hydrostatik



$\Rightarrow$  Schermodul  $G = 0$  für ideale Flüssigkeit

	Fest	Flüssig	Gas
$G$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
$\alpha$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\neq 0$

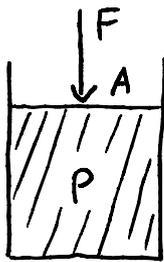
ignorieren Kompressibilität für Flüssigkeiten:

	Stahl	Wasser	Luft
$\alpha$ :	$6,3 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$	$4,8 \times 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$	$10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$

"klein"

- Druck:

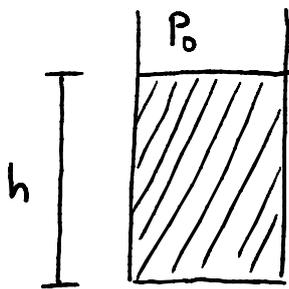
i) äußerer Druck



$$P = \frac{F}{A} \quad [P] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

$$10^5 \text{ Pascal} \approx \text{atm}$$

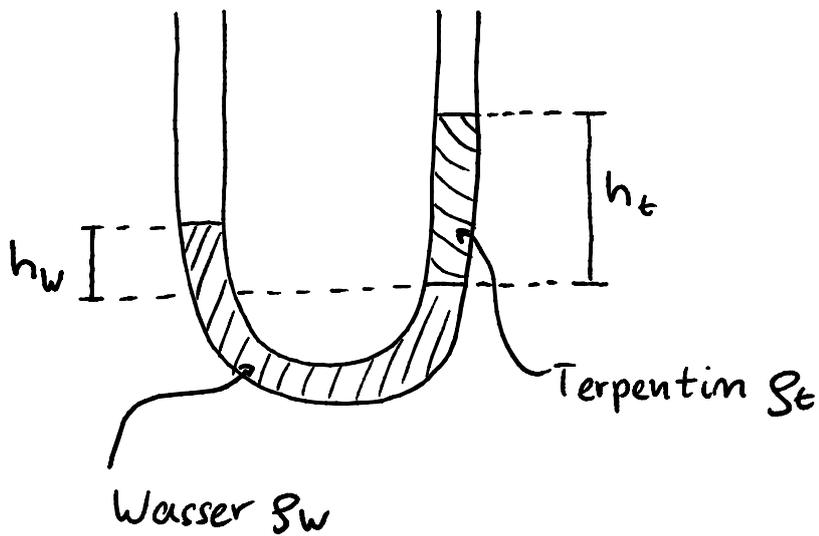
ii) Schweredruck durch Eigengewicht



$$P = \int_0^h \frac{\rho g A}{A} dz = \rho g h$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \rho g h + P_0} \quad \text{Schweredruck}$$

$P_0 =$  möglicher äußerer Druck

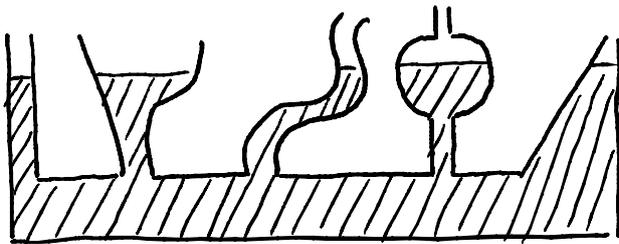


Gleichgewicht:

$$\rho_w h_w A g = \rho_t h_t A g$$

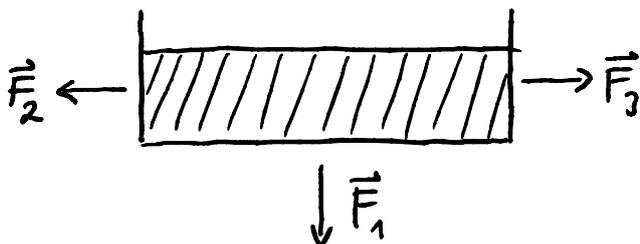
$$\Rightarrow \rho_t = \frac{h_w}{h_t} \rho_w$$

$\Rightarrow$  Druck wird durch das Rohr kommuniziert  
U-Rohr wirkt wie Balkenwaage

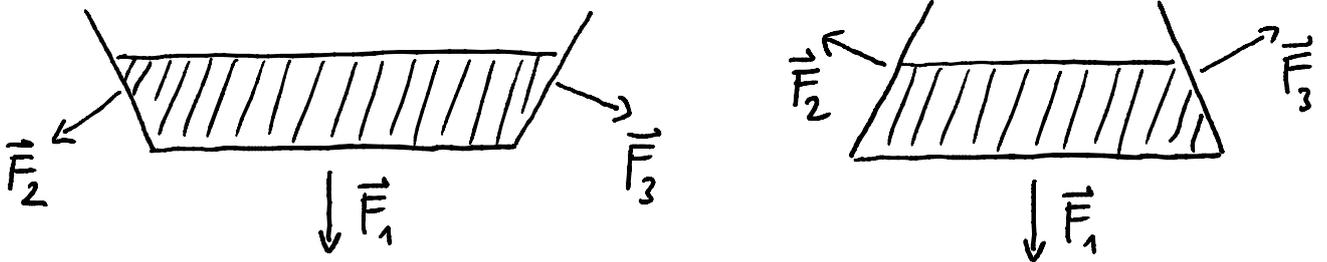


$\Rightarrow$  Druck unabhängig von der Gestalt des Gefäßes  
"hydrostatische Paradoxon"

Erklärungsmöglichkeit:



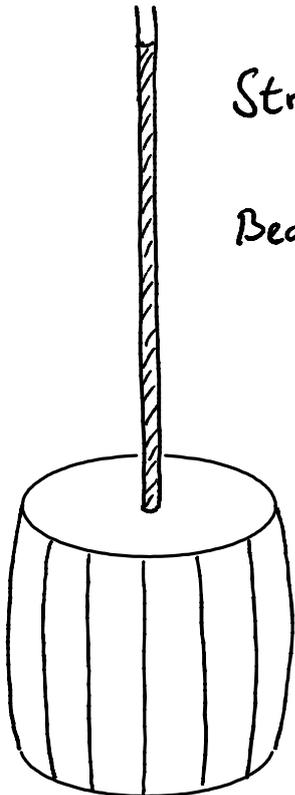
Gefäß baut Gegenkraft zu  $\vec{F}_2$  und  $\vec{F}_3$  auf.



⇒ Gegenkraft hat die "fehlende" vertikale Komponente

⇒ Druck wirkt isotrop

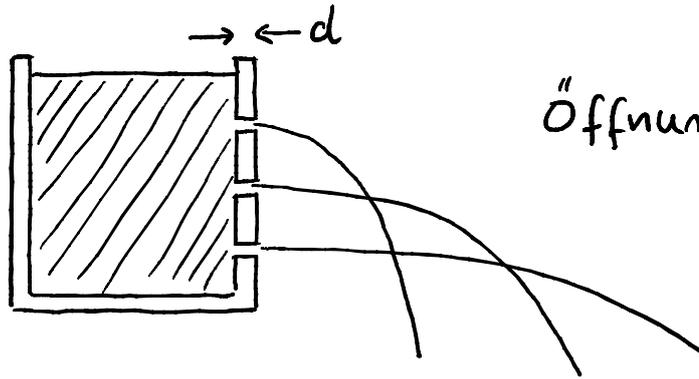
• Blaise Pascal 1648



Strohalm bring Fass zum platzen (theoretisch)

Beachte: Kraft wird überhöht (Übersetzung)  
nicht aber die Energie.

• Torricelli Flasche



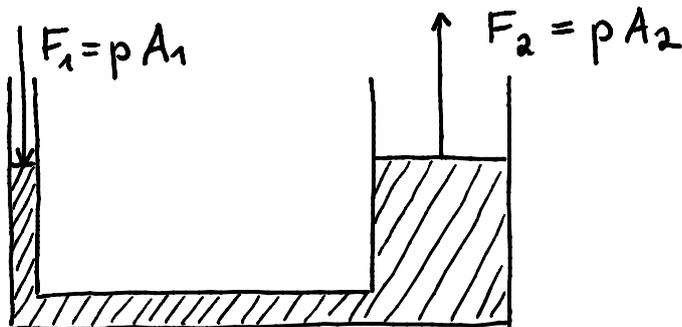
Öffnungen mit Fläche  $A$

Arbeit beim Austritt:  $Fd = pAd = \rho ghAd$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho Ad v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

- Hydraulische Presse



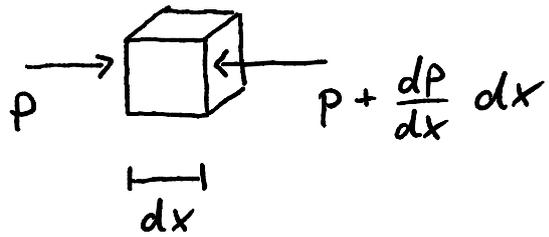
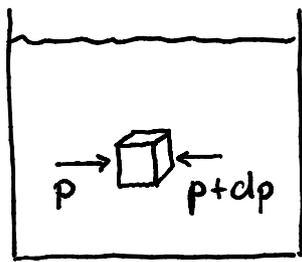
$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}}$$

"Übersetzungshebel"

Statischer Druck ist isotrop. Ansonsten würde sich die Flüssigkeit in Bewegung setzen bis die Druckunterschiede ausgeglichen sind.

- Kräfte, genauer



$$\Rightarrow dF_x = p dy dz - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy dz$$

$$= - \frac{dp}{dx} dV \quad dV = dx dy dz$$

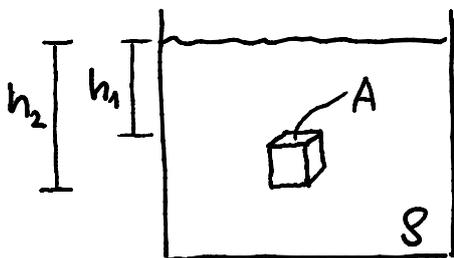
analog für  $dF_y$  und  $dF_z$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{F} = -\vec{\nabla} p dV} \quad \text{Kraftdichte} = \text{Druckgradient}$$

Hydrostatik:  $\vec{\nabla} p = 0$  oder  $-\vec{\nabla} p dV = -\vec{g} \rho dV$

mit oder ohne äußere Kraft: Gesamtkraft = 0

- Auftrieb



$$\Delta p = \rho g (h_2 - h_1)$$

$$F_A = \Delta p A = \underbrace{\rho g A (h_2 - h_1)}_{= M_{Fe}}$$

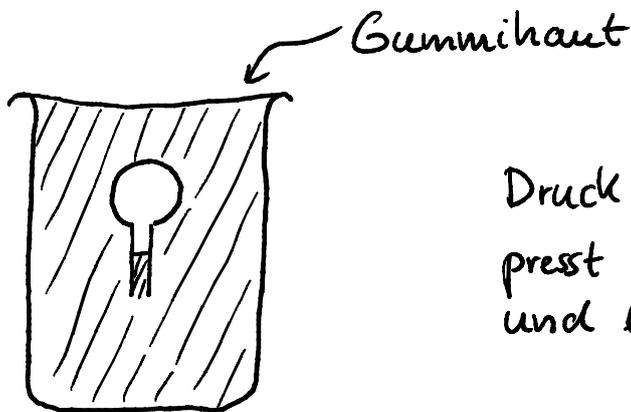
⇒ Archimedisches Prinzip

Auftriebskraft = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

$$F_A = M_{Fe} g$$

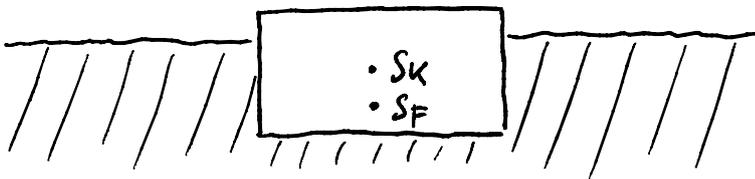
Gilt auch für beliebig geformte Körper: Zerlegung in Würfel

- Cartesischer Taucher



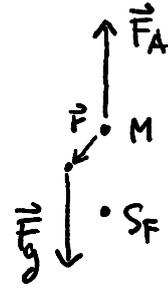
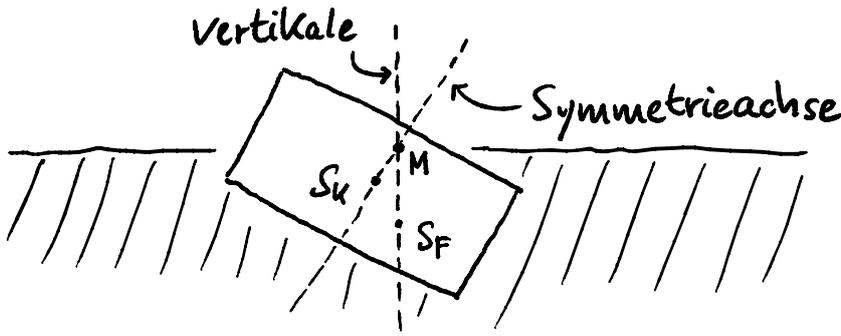
Druck auf Gummihaut  
presst Wasser in Taucher  
und läßt ihn untergehen.

- Schwimmen, Stabilitätsbedingung



$S_K$  = Schwerpunkt des Körpers

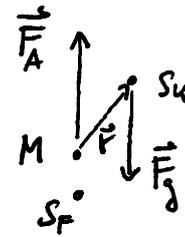
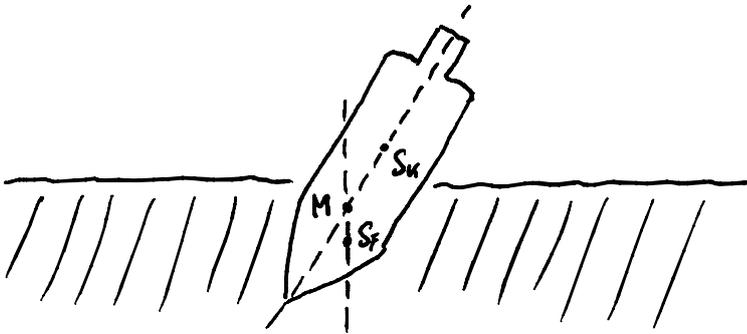
$S_F$  = Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit



$M = \text{Metazentrum} = \text{Drehpunkt}$

$M$  oberhalb von  $S_K$ :

Drehmoment dreht zurück  $\Rightarrow$  stabil

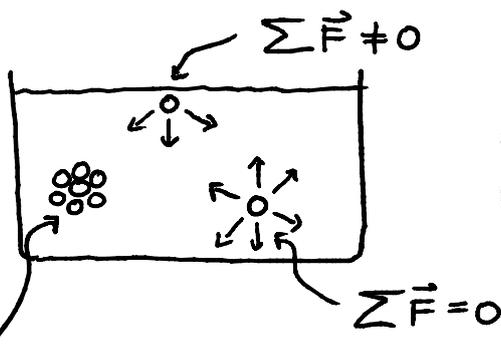


$M$  unterhalb von  $S_K$ :

Drehmoment dreht weiter  $\Rightarrow$  instabil

## - Oberflächenspannung

nicht-ideale Flüssigkeit: Kraft zur Verformung



Nettokraft auf Oberflächenmoleküle nach innen.

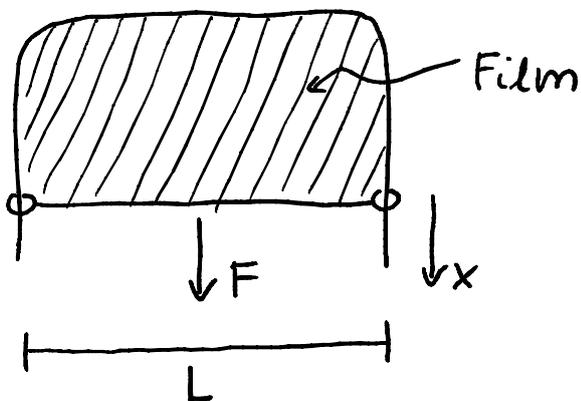
Moleküle ziehen sich an

⇒ Energie  $W$  um Moleküle auf Oberfläche  $A$  zu bringen:

⇒  $\sigma = \frac{W}{A}$  Oberflächenenergie  
oder Oberflächenspannung

$$[\sigma] = \frac{N}{m} = \frac{J}{m^2}$$

Messung mit Lenardbügel

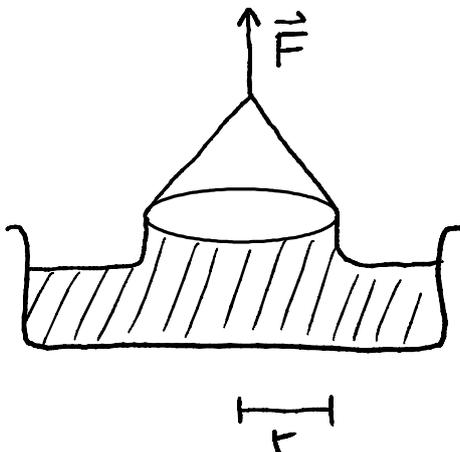


2 Oberflächen

$$W = Fx = \sigma (2Lx)$$

⇒  $\sigma = \frac{F}{2L}$

Variante



$$\sigma = \frac{F}{4\pi r}$$

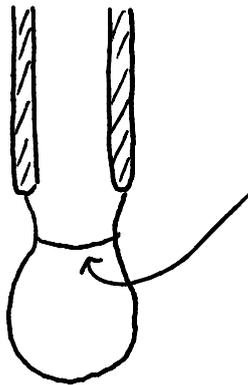
gemessen  $\sigma = \frac{23 \text{ mN}}{4\pi \cdot 2,5 \text{ cm}} = 73 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$

Beispiele:	$\sigma$ [N/m]
Wasser	0,073
Äthanol	0,023
Quecksilber	0,471

Hängt stark von Verunreinigung ab, insbesondere wenn diese auf der Oberfläche sitzen.

Konzentration von  $10^{-6}$  Cetylpyridinhydrochlorid (Spülmittel) reduziert  $\sigma$  in Wasser auf  $1/5$ .

### - Tropfenbildung

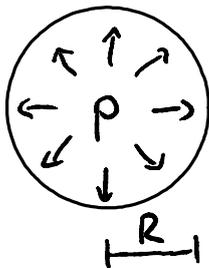


$$2\pi R \Rightarrow F = 2\pi R\sigma$$

Tropfen löst sich falls  $mg > F$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \approx 2\pi R\sigma \Rightarrow R = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\sigma}{\rho g}} = 3,3 \text{ mm}$$

Binnendruck im Tropfen (ohne Schwerkraft)



$$W = \sigma A = \sigma 4\pi R^2$$

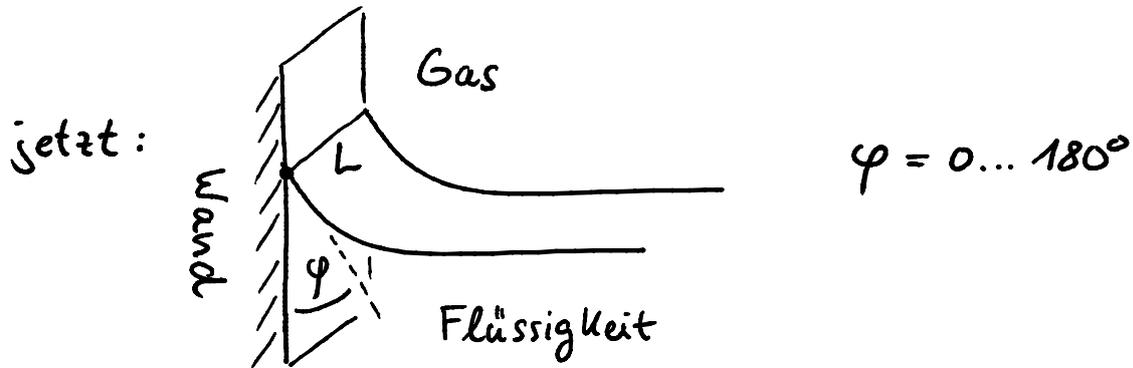
$$\text{Kraft: } F_{\sigma} = \frac{\partial}{\partial R} W = 8\pi\sigma R \stackrel{!}{=} A p = 4\pi R^2 p$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{2\sigma}{R}}$$

Seifenblasen: 2 Oberflächen  $\Rightarrow p = \frac{4\sigma}{R}$

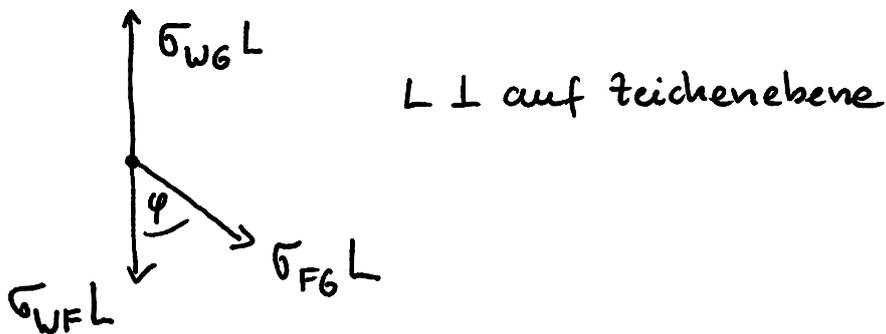
- Kapillarität (Kohäsion  $\rightarrow$  Adhäsion)

bisher: Grenzfläche Flüssig - Vakuum / Gas



Oberflächenspannung an allen Grenzflächen:  $\sigma_{WG}$ ,  $\sigma_{WF}$ ,  $\sigma_{FG}$

Kräfte:



Vertikal:  $\sigma_{WG} L = \sigma_{WF} L + \cos \varphi \sigma_{FG} L$

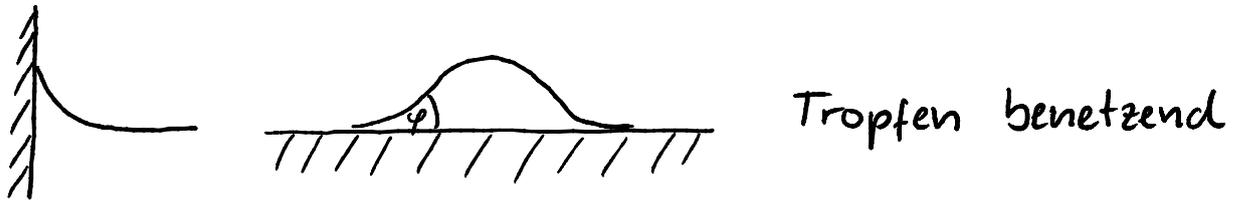
horizontal: Gegenkraft der Wand (zieht an der Wand)

$\Rightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{WG} - \sigma_{WF}}{\sigma_{FG}}$$

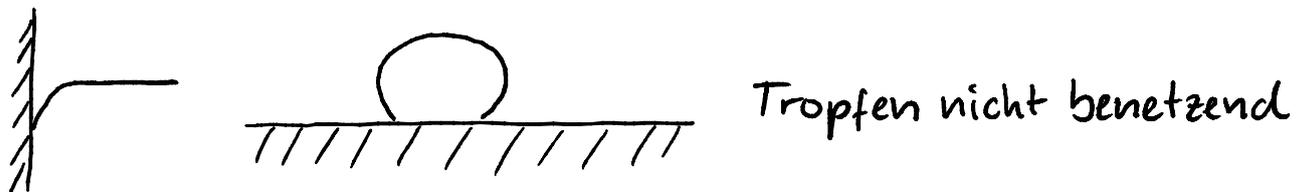
$$i) \sigma_{WG} > \sigma_{WF}, \left| \frac{\sigma_{WG} - \sigma_{WF}}{\sigma_{FG}} \right| \leq 1 \Rightarrow \varphi < 90^\circ$$

Flüssigkeit kriecht die Wand hinauf



$$ii) \sigma_{WG} < \sigma_{WF}, \left| \frac{\sigma_{WG} - \sigma_{WF}}{\sigma_{FG}} \right| \leq 1 \Rightarrow \varphi > 90^\circ$$

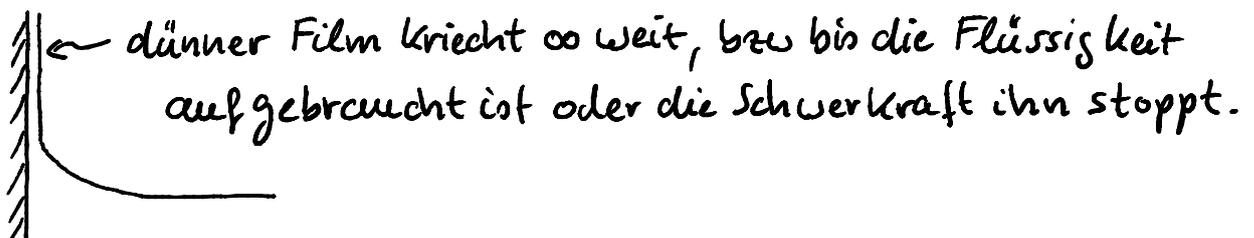
Flüssigkeit wird hinab gedrückt



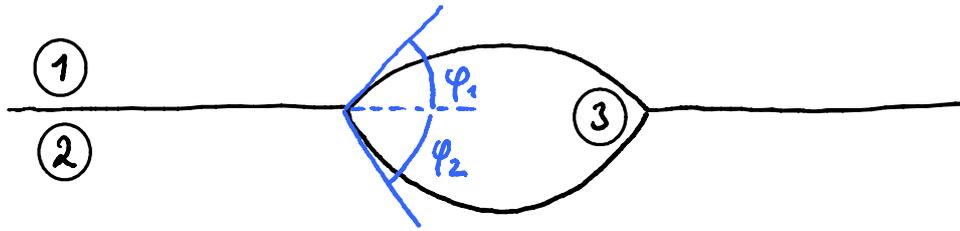
In beiden Fällen ist es energetisch günstiger die Grenzfläche mit hoher Energie durch eine Grenzfläche mit niedriger Energie zu verdrängen.

$$iii) \left| \frac{\sigma_{WG} - \sigma_{WF}}{\sigma_{FG}} \right| > 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ reicht nicht}$$

Kein Kräftegleichgewicht möglich!



# Schwimmender Tropfen



z.B. Motoröl auf Wasser:

$$\sigma_{12} = 0,073 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \sigma_{32} = 0,032 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \sigma_{13} = 0,018 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

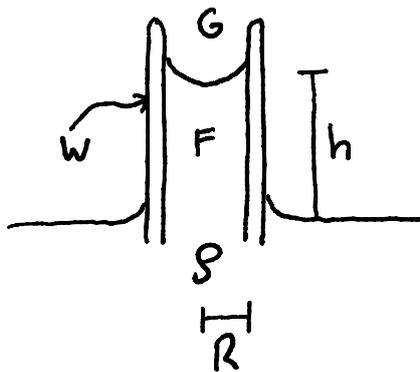
$$\sigma_{12} = \sigma_{13} \cos \varphi_1 + \sigma_{32} \cos \varphi_2 \quad \text{nicht möglich!}$$

⇒ Kein Kräftegleichgewicht

Tropfen wird molekular auseinander gezogen.

(Campher Boot)

- Kapillarwirkung in dünnen Röhren



$$W = A (\sigma_{WG} - \sigma_{WF}) = 2\pi R h (\sigma_{WG} - \sigma_{WF})$$

$$\Rightarrow F_G = \frac{\partial}{\partial h} W = 2\pi R (\sigma_{WG} - \sigma_{WF})$$

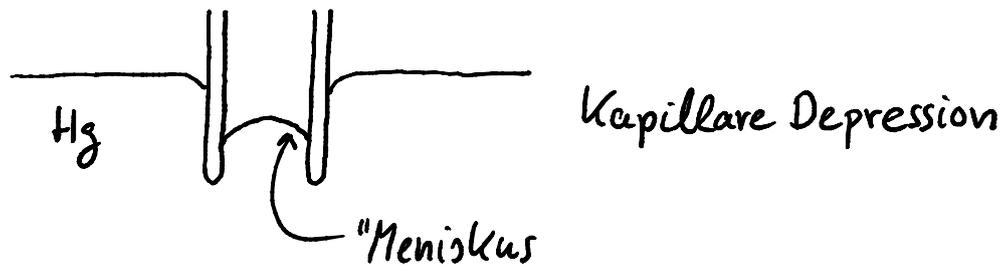
$$\stackrel{!}{=} mg = \pi R^2 h \rho g$$

$$\Rightarrow h = \frac{2(\sigma_{WG} - \sigma_{WF})}{R \rho g} = \frac{2 \sigma_{FG} \cos \varphi}{R \rho g}$$

dünnes Rohr: ⇒  $\varphi \approx 0$

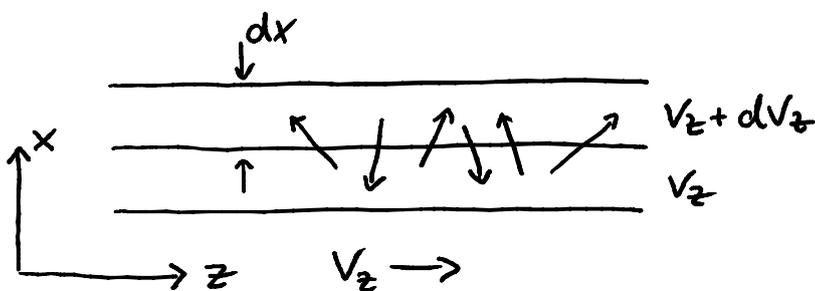
$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{2\sigma}{R \rho g}} \quad \sigma = \text{Oberflächenspannung Flüssigkeit } (\approx \sigma_{FG})$$

$$\sigma_{WG} - \sigma_{WF} < 0 \quad \text{z.B. Quecksilber / Glas}$$



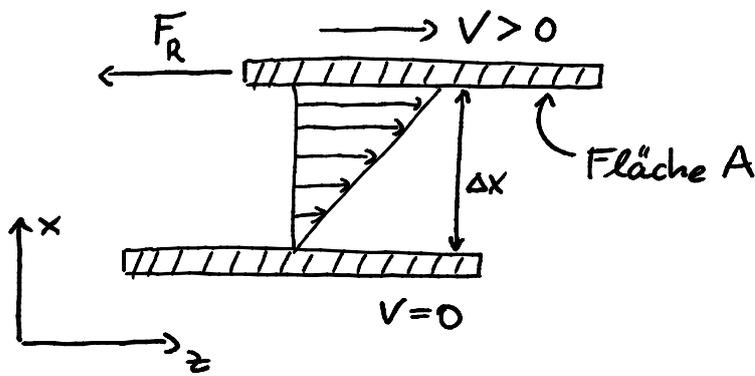
- Hydrostatik  $\rightarrow$  Hydrodynamik

- Teilweise auch auf strömende Gase anwendbar:  
Fluid = Flüssigkeit / Gas
- laminaire Strömung (keine Wirbel)  
Modell: Schichten gleiten aufeinander.
- Viskosität: Reibung zwischen den Schichten  
"kleine" Scherkräfte auch in Fluiden  
nicht ideal; z.B. rotierender Eimer.



Austausch von transversalem Impuls  $p_z$  durch

Diffusion und Stöße in  $x$ -Richtung  $\Rightarrow F_R \sim \frac{dv_z}{dx}$



$$\Rightarrow \boxed{F_R = \eta A \frac{dv_z}{dx}}$$

$\eta = \text{Viskosität}$

$$[\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pas}$$

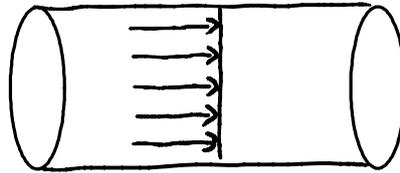
- neue Form der Reibung, Geschwindigkeitsabhängig
- Ähnlich zur Scherung:  $G \rightarrow \tau$   $\alpha \rightarrow \frac{dv_z}{dx}$
- Anwendbar auch für Gase
- Diffusion und damit  $\eta$  stark temperaturabhängig

Beispiele	$\eta$ [mPas]	
20°C	Wasser	1,0
	Äthanol	1,2
	Glycerin	1480
	Pech	$2,3 \times 10^{11}$
${}^4\text{He}$ (2,14K)	o suprafluid	) extrem
Wasser	$\eta$ [mPas]	
0°C	1,8	
40°C	0,65	
80°C	0,36	
100°C	0,28	

- Flüssigkeiten:  $T \uparrow \Rightarrow \eta \downarrow$
- Gase:  $T \uparrow \Rightarrow \eta \uparrow$  (Diffusion erhöht)

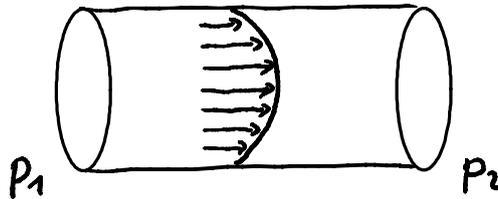
## - Rohrströmung

ideale Flüssigkeit  $\eta = 0$ :

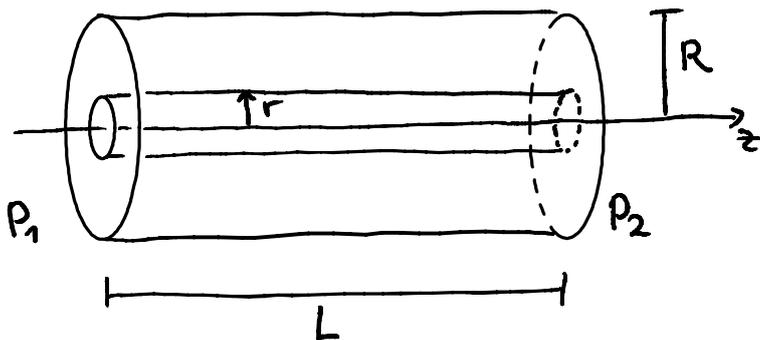


$v = \text{const}$ , keine innere Reibung oder mit Wand

viskose Flüssigkeit  $\eta \neq 0$ :



$v \neq \text{const}$ , Druckdifferenz  $p_1 - p_2 \neq 0$  nötig



Druckkraft auf Zylinder:  $F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$

Reibungskraft:  $F_R = -\eta A \frac{dv}{dr} = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$

Gleichgewicht:  $F_R = F_p \Rightarrow -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2)$

$$\Rightarrow dv = -\frac{1}{2\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} r dr \Rightarrow \int_v^0 dv' = -\frac{1}{2\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} \int_r^R r' dr'$$

$$\Rightarrow \boxed{v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} (R^2 - r^2)}$$

parabolisches  
Geschwindigkeitsprofil

• Strom (Volumen pro Zeit):

$$dI = 2\pi r dr v(r) = 2\pi r dr \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} (R^2 - r^2)$$

$$I = \int_0^R dI = \frac{\pi}{2\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$= R^2 \frac{r^2}{2} \Big|_0^R - \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{8\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} R^4}$$

Gesetz von  
Hagen - Poiseuille

• "Ohm'sches - Gesetz" der Strömungsmechanik

$$I = \frac{U}{R_\Omega} \quad U = P_1 - P_2 \quad R_\Omega = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

• Sehr starke Abhängigkeit von  $R_\Omega$  von  $R$ .

Blutkreislauf:  $R$  20% größer  $\Rightarrow$  doppelter Strom

- Strömungswiderstand durch Reibung / Viskosität

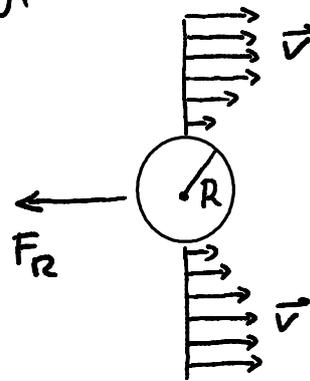
Gesamtkraft:  $F_R = (P_1 - P_2) A = (P_1 - P_2) \pi R^2$

mittlere Geschwindigkeit:  $\bar{v} = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{1}{8\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} R^2$

$\Rightarrow \boxed{F_R = -8\pi\eta L \bar{v}} \quad \sim \bar{v} \text{ und } \sim \eta$

sehr ähnlich aber längere Rechnung,

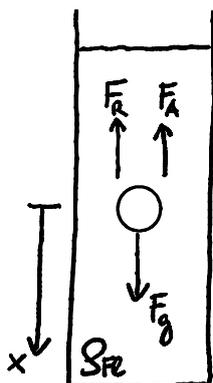
laminar umströmte Kugel:



$\Rightarrow \boxed{F_R = -6\pi\eta R \bar{v}}$  Stokes Reibung

(siehe gedämpfter Oszillator p. 1)

- Kugelfallviskosimeter



$$F_g = mg = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho g$$

$$F_A = mg = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{Fl} g$$

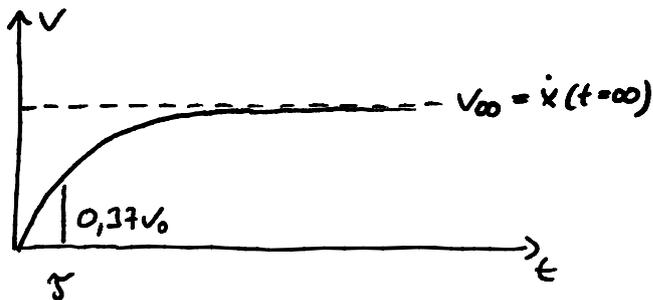
$$F_R = 6\pi\eta R v$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \ddot{x} = F_g - F_A - F_R = \frac{4\pi}{3} R^3 g (\rho - \rho_{Fe}) - 6\pi\eta R \dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g \frac{\rho - \rho_{Fe}}{\rho} - \frac{g}{2} \frac{\eta}{R^2 \rho} \dot{x}$$

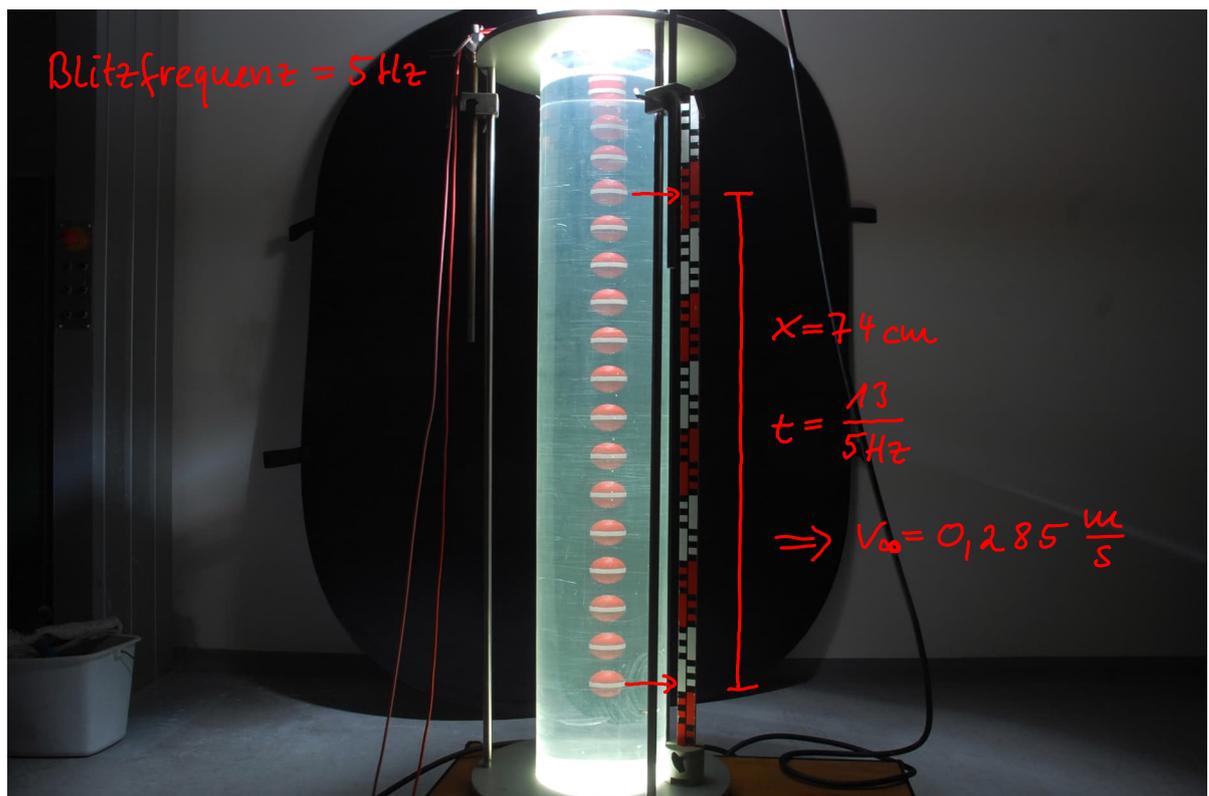
Differentialgleichung 1. Ordnung in  $\dot{x}$ .

Lösungsansatz:  $\dot{x}(t) = (1 - e^{-t/\tau}) v_{\infty}$



$$\Rightarrow \frac{v_{\infty}}{\tau} e^{-t/\tau} = g \frac{\rho - \rho_{Fe}}{\rho} - v_{\infty} \frac{g}{2} \frac{\eta}{R^2 \rho} + v_{\infty} \frac{g}{2} \frac{\eta}{R^2 \rho} e^{-t/\tau}$$

für alle  $t \Rightarrow v_{\infty} = \frac{2}{g} \frac{R^2 g}{\eta} (\rho - \rho_{Fe}) \quad \tau = \frac{2}{g} \frac{R^2 \rho}{\eta}$



mit  $R = 20 \text{ mm}$

$$\rho = 1,37 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_{\text{Fe}} = 1,26 \text{ g/cm}^3 \quad \text{Glycerin (86\%)}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{2}{9} \frac{R^2 g}{\nu_0} (\rho - \rho_{\text{Fe}}) = 0,337 \text{ Pas} \quad \tau = 0,36 \text{ s}$$

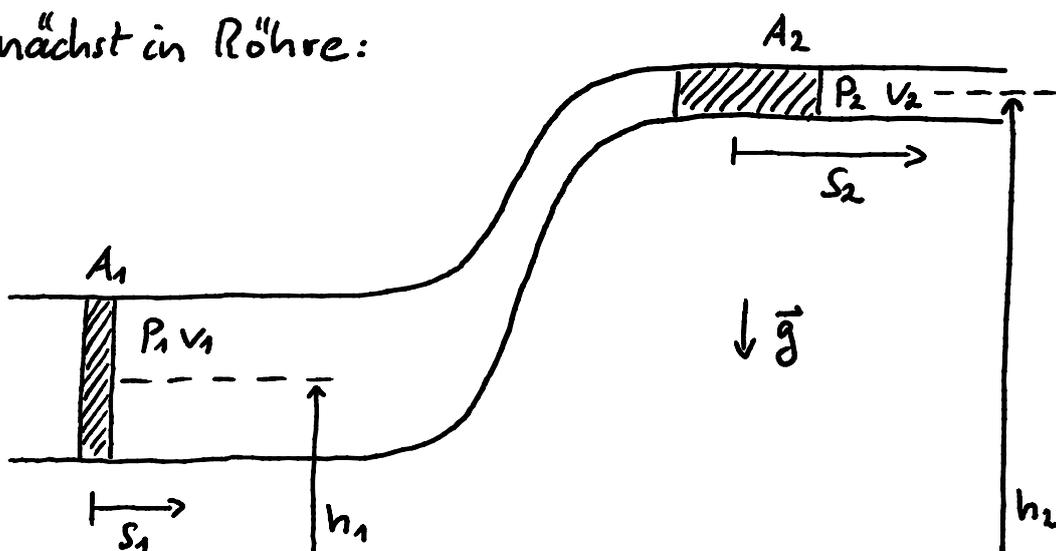
(deutlich kleiner als Literaturwert, siehe Demtröder 8.5.4)  
(vermutlich durch Verdünnung mit Wasser)

## - Bernoulli Gleichung

ideale Flüssigkeit/Fluid

- inkompressibel:  $\alpha = 0$  (am besten für Flüssigkeit)
- reibungslos:  $\eta = 0$  (am besten für Gas)
- stationäre, laminare Strömung:  $\vec{v}(F) \neq \vec{v}(F, t)$

zunächst in Röhre:



$$\text{Kraft} \times \text{Weg} = p A s = p V \quad \leftarrow \text{Volumen}$$

Energieerhaltung ( $\gamma=0$ ):

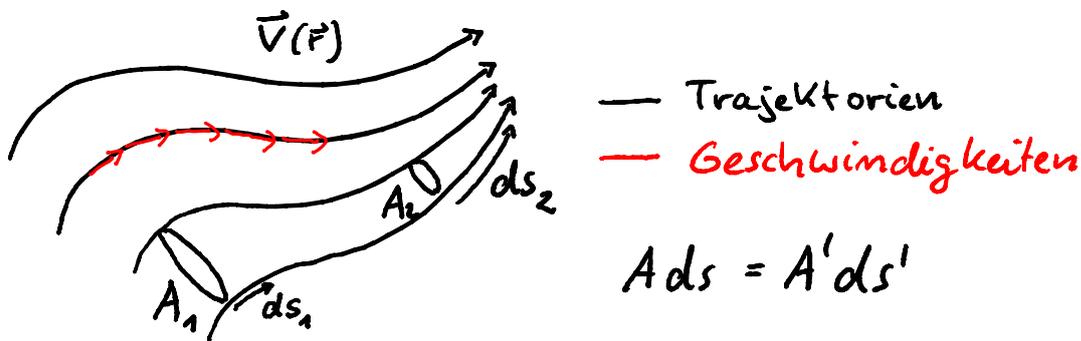
$$(p_1 - p_2)V = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + mg(h_2 - h_1)$$

Inkompressibilität ( $\kappa=0$ ): Volumen  $V$  ändert sich nicht.

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(h_2 - h_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho gh = \text{const}} \quad \begin{array}{l} \text{Bernoulli} \\ \text{Gleichung} \end{array}$$

• auch ohne Röhre:



• Kontinuität (Volumen konstant  $\kappa=0$ )

$$A_1 ds_1 = A_2 ds_2 \quad / \times \frac{1}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

• Drucksensor mißt  $p =$  "statischer Druck" (geleistete Arbeit)  
↑ isotrop

- $\frac{\rho}{2} v^2 = \text{"Staudruck" (kin. Energie)}$

↑ nicht isotrop

- $\rho g h = - \text{Schweredruck (pot. Energie)}$

- $v=0, h=0 \Rightarrow \text{const} = p(v=h=0) = \text{"Gesamtdruck"}$

- hydrodynamisches Paradoxon:  $|\vec{v}| \uparrow \Leftrightarrow p \downarrow$

schnelle Strömung verringert Druck um  $\frac{\rho}{2} v^2$

(Trägheitskraft  $\Leftrightarrow$  Druck)

- Gilt auch für Gase falls  $v \ll \text{Schall}$

Beispiel: Luft  $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$

$\approx 10^5 \text{ Pa}$   
↓

$v = 50 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{\rho}{2} v^2 = 1625 \text{ Pa} \approx 1\% \text{ Normaldruck}$

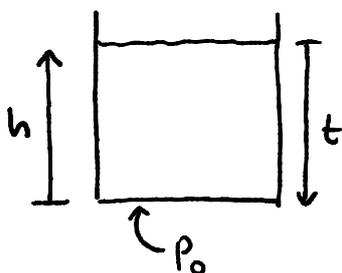
$\Rightarrow$  Volumen ändert sich ebenfalls um 1%.

$v = 340 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{\rho}{2} v^2 = 75\% \text{ Normaldruck}$

$\Rightarrow$  Volumen ändert sich um 75%!

— Anwendungen der Bernoulli Gleichung:

i) Schweredruck

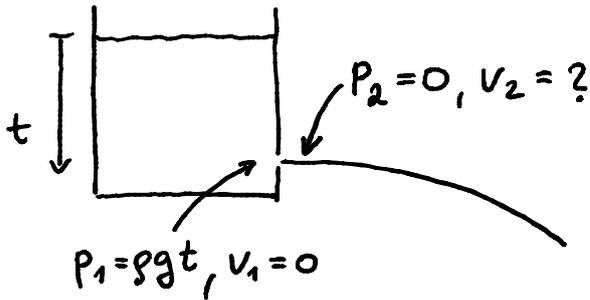


$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g h = p_0$$

$$\Rightarrow p = -\rho g h + p_0$$

$$h = h_0 - t$$

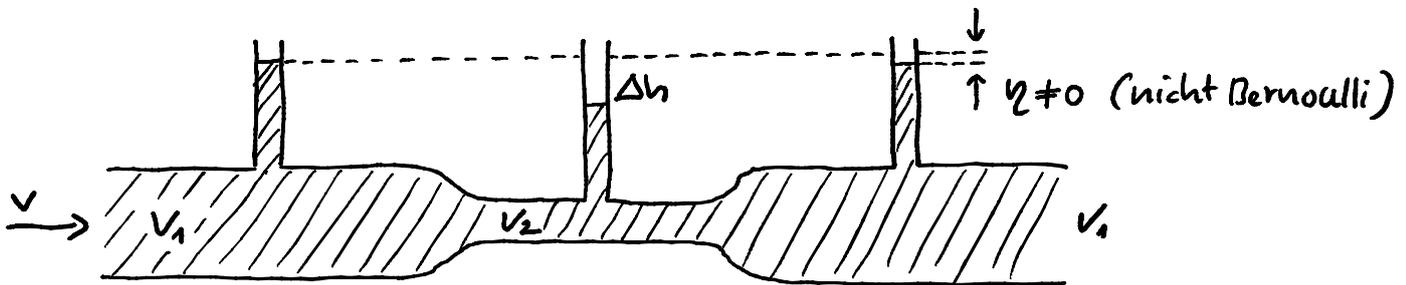
## ii) Torricelli Flasche



$$P_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$\Rightarrow \rho g t = \frac{\rho}{2} v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 g t}$$

## iii) Rohrströmung

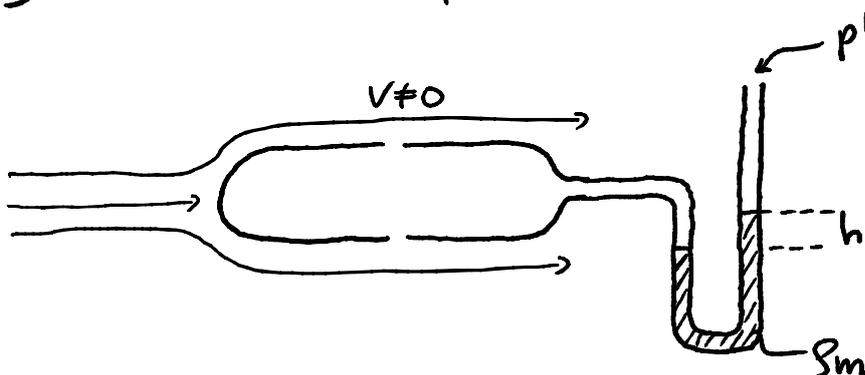


$$\Rightarrow \rho g \Delta h = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$$

Staudruck wirkt nur in Fließrichtung, wird aber trotzdem vom statischen Druck abgezogen.

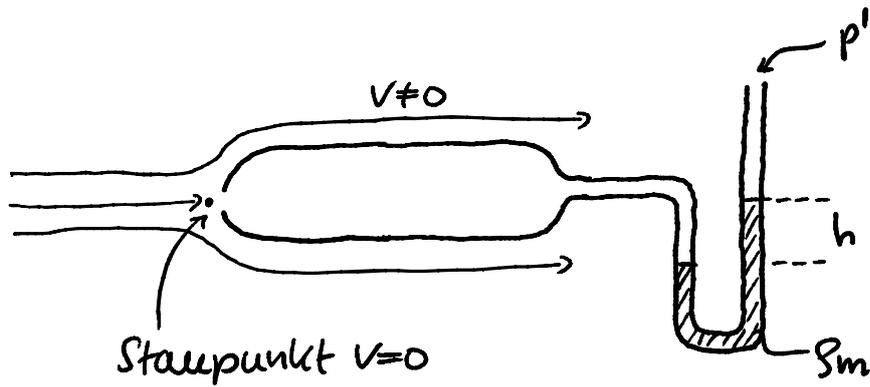
## iv) Druckmessung

### a) statischer Druck $p$ (transversal)



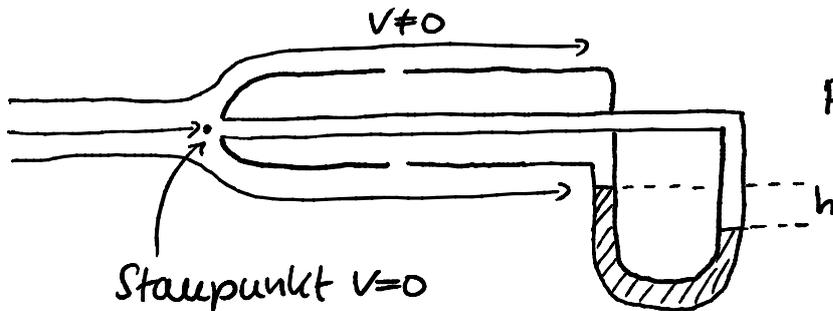
$$p(v \neq 0) - p' = \rho_m g h$$

b) Gesamtdruck (longitudinal)



$$p(v=0) - p' = \rho_m g h$$

c) Staudruck

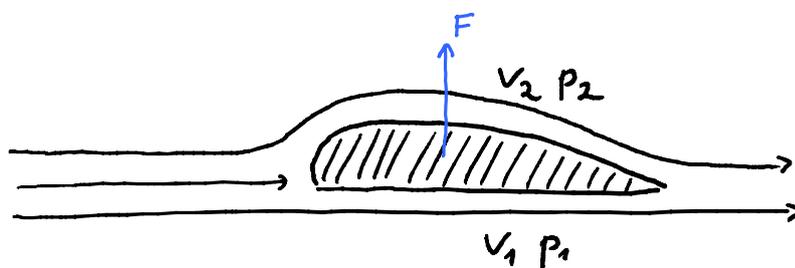


$$p(v=0) - p(v \neq 0) = \frac{\rho}{2} v^2$$

$$= \rho_m g h$$

Prandtl'sches Staurohr: Geschwindigkeitsmessung

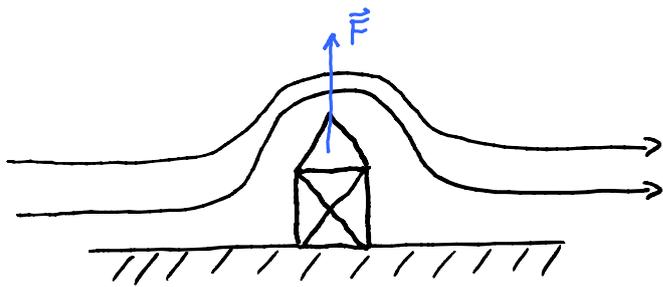
v) Tragflügelprofil



$$v_2 > v_1 \Rightarrow \frac{\rho}{2} v_2^2 > \frac{\rho}{2} v_1^2 \Rightarrow p_2 < p_1 \Rightarrow \text{Auftrieb}$$

(nur ein Faktor)

## vi) Hausdach

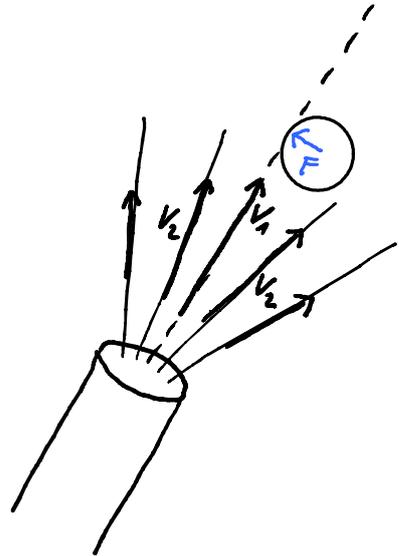


Auftrieb!

## vii) Ball im Luftstrom

$$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p_2$$

$\Rightarrow$  Kraft Richtung Achse



## vii) Kavitation

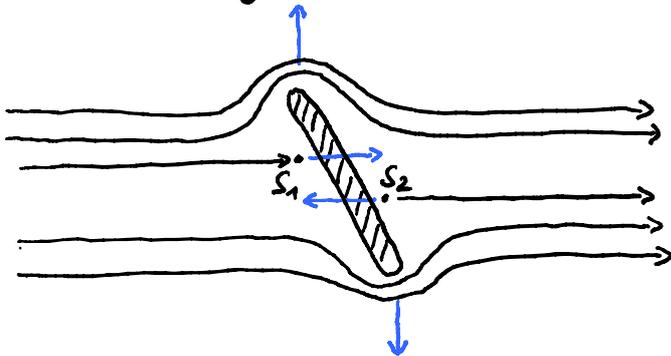
$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_0 \Rightarrow p < 0 \text{ für } v > \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} !$$

$\Rightarrow$  Blasenbildung ( $p = \text{Dampfdruck}$ , siehe Kapitel 11)

Blasen kollabieren  $\Rightarrow$  Korrosion

(Sonoluminiscenz,  $T \approx 10^4 \text{ K}$ !)

## viii) Umströmung einer schrägen Platte



$\eta = 0 \Rightarrow$  symmetrisch  $\Rightarrow$  keine Kraft auf die Platte  
aber Drehmoment: Platte stellt sich quer

— Korrekturen zu Bernoulli

### i) Grenzschicht

$\eta = 0$  Fluid gleitet an der Oberfläche: keine Reibung

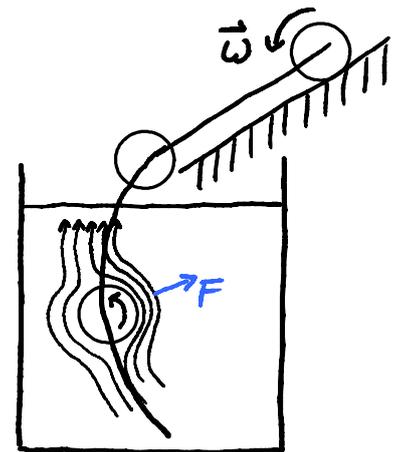
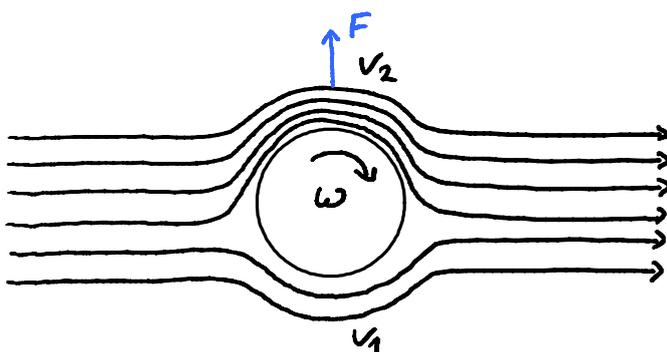
$\eta \neq 0$  Fluid wird mitgeführt: Reibung, Grenzschicht

In der Grenzschicht ist  $\frac{dv_z}{dx}$  groß, d.h. auch bei

kleinem  $\eta$  kann  $F_R = -\eta A \frac{dv_z}{dx}$  groß sein: Bernoulli

möglicherweise überall gültig, außer in Grenzschicht.

### • Magnus Effekt

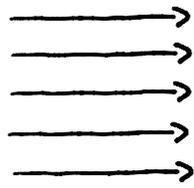


Außerhalb der Grenzschicht: Bernoulli  $v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$

$\Rightarrow$  Kraft (Auftrieb)

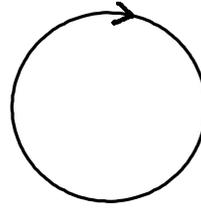
z.B. beim Fußball ("ändrehen")

Strömung:



Laminar

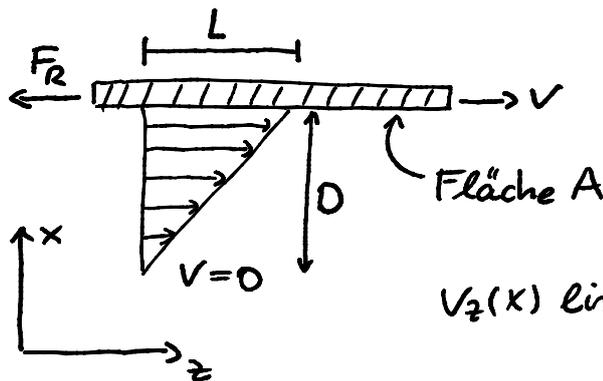
+



Wirbel

- Dicke der Grenzschicht (Abschätzung)

$$F_R = \eta A \frac{dv_z}{dx}$$



$v_z(x)$  linear (Annahme!)

$$v_z(x) = \frac{x}{D} v \quad v_z(x > D) = 0 \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{v}{D}$$

Energieaufwand für Beschleunigung von 0 auf  $v$  ( $z=0 \dots L$ ):

$$F_R L = \eta A L \frac{v}{D} \stackrel{!}{=} E_{\text{kin}} + \underbrace{\text{Wärme}}_{\approx 0}$$

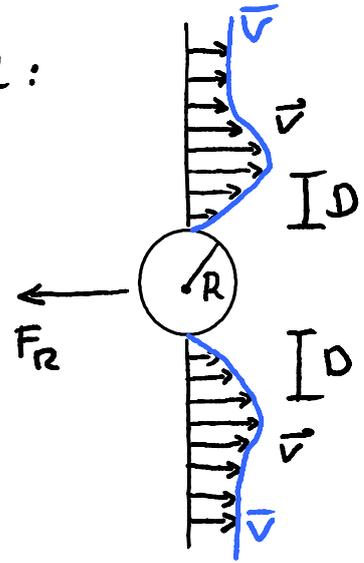
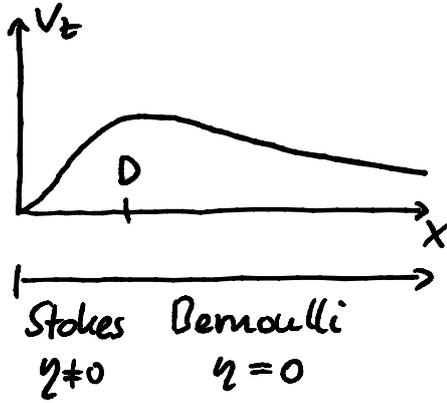
$$= \frac{1}{2} \int_0^D \rho \left(\frac{x}{D}\right)^2 v^2 dx = \frac{1}{2} \rho \frac{x^3}{3D^2} \Big|_0^D = \frac{1}{6} \rho D v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{D \approx \sqrt{\frac{6\eta L}{\rho v}} \approx \sqrt{\frac{\eta L}{\rho v}}}$$

Prandtl'sche  
Grenzschicht

Beispiele: Wasser  $L=2\text{cm}$ ,  $v=10\text{cm/sec}$ ,  $\eta=0,001\text{Pas} \Rightarrow D=450\mu\text{m}$   
 Glycerin -"- -"-  $\eta=1,48\text{Pas} \Rightarrow D=1,5\text{cm}$

Korrektur, laminar umströmte Kugel:



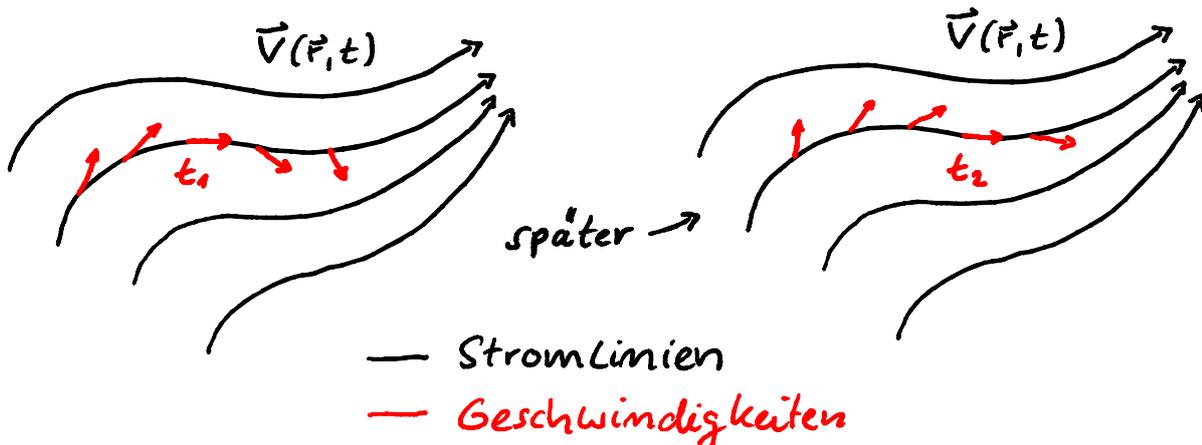
Bernoulli versagt innerhalb  $\approx D$

- Skalierte Modelle mit gleichem  $\frac{L}{D} \approx \sqrt{\frac{\rho v L}{\eta}}$  Verhalten sich ähnlich:

$\Rightarrow$   $Re \equiv \frac{\rho \bar{v} L}{\eta}$  Reynoldszahl (dimensionslos)

$\bar{v}, L$  = charakteristische Geschwindigkeit / Länge

- ii) nicht stationäre Strömung, Geschwindigkeitsfeld:



$\vec{V}(\vec{r}) \neq \vec{V}(\vec{r}, t)$ : Stationäre Strömung, Stromlinie = Trajektorie

$\vec{V}(\vec{r}, t)$ : Bewegungsgleichung aus Bewegungsgleichung für Teilchen  $F=ma$

Newton: jedem Teilchen wird  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  zugewiesen.

hier: jedem Ort wird ein  $\vec{v}$  zugewiesen

$$F=ma \Rightarrow \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{a}(\vec{r}, t)$$

x-Komponente

$$a_x(\vec{r}, t) = \frac{dv_x}{dt}$$

← totale Ableitung  
← partielle Ableitungen

$$= \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_{a_1} + \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}}_{b_1}$$

"v<sub>x</sub>" "v<sub>y</sub>" "v<sub>z</sub>"

Teilchengeschwindigkeit ändert sich aus zwei Gründen

a) Feld  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  ist explizit zeitabhängig.

b) der Ort der Teilchen ändert sich.

analog für y und z-Komponente:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}$$

z.B. x-Komponente:  $(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_x$

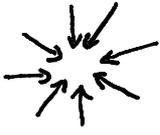
$$\Rightarrow \boxed{\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p}$$

Euler Gleichung  
(der Hydrodynamik)

- nicht linear  $\Rightarrow$  schwierig zu lösen, keine Superpositionen
- Euler: " $F=ma$ "
- Bernoulli: " $E_{pot} + E_{kin} = const$ "
- beides zunächst nur für  $y=0$  und  $x=0$

iii) Kompressibilität  $\alpha \neq 0$

Kontinuitätsgleichung erweitern:

Feld  $\vec{v}$  kann komprimieren, z. B. 

Massenerhaltung: Divergenz im  $\vec{F} =$  Massenabnahme im  $\vec{F}$

- Stromdichte  $\vec{j} \equiv \rho \vec{v}$

$\Rightarrow$   $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}}$  Kontinuitätsgleichung für  $\alpha \neq 0$

- Kompressibilität berücksichtigen:

Kontinuitätsgleichung + Euler mit Zusatzterm:

Kompression  $\sim$  Druck,  $\vec{\nabla} p =$  Kraft

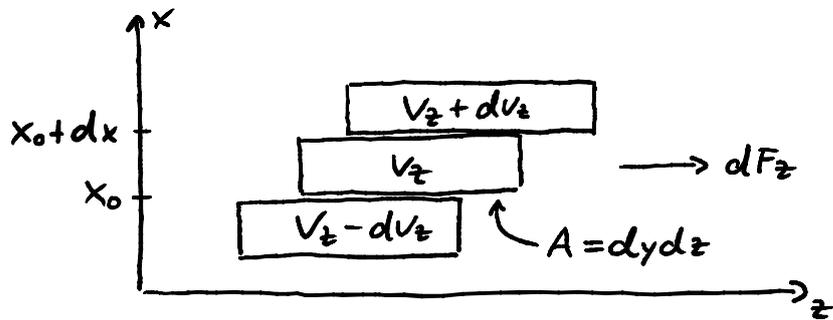
Zusatzterm  $\sim \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$

Wir bleiben aber bei inkompressiblen Fluid:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$$

iv) Erweiterung auf  $\eta \neq 0$  (interne Reibung)

zunächst Strömung entlang  $z$ :



$$dF_z = \eta A \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=x_0+dx} - \eta A \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$$= \eta A \left( \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=x_0} + \left. \frac{d^2v_z}{dx^2} \right|_{x=x_0} dx - \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=x_0} \right)$$

$$= \eta A \frac{d^2v_z}{dx^2} dx = \eta dV \frac{dv_z^2}{dx^2} \quad dV = dx dy dz$$

↑  
Volumen

analog für Änderung von  $v_z$  entlang  $y$  und  $z$ :

$$\Rightarrow dF_z = \eta dV \left( \frac{d^2v_z}{dx^2} + \frac{d^2v_z}{dy^2} + \frac{d^2v_z}{dz^2} \right)$$

$$\frac{dF_z}{dV} = \eta \vec{\nabla}^2 v_z \quad \text{mit } \vec{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

(auch  $\Delta \equiv \vec{\nabla}^2$  Laplace Operator)

analog für  $dF_x$  und  $dF_y$ :

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (\text{Komponentenweise})$$

⇒ Zusatzterm in Euler Gleichung

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Navier-Stokes  
Gleichung

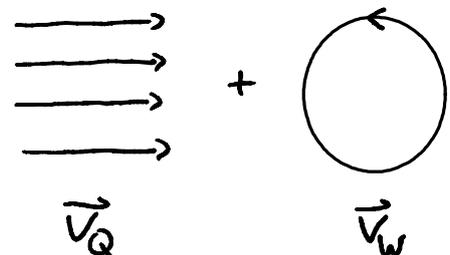
- inkompressibler aber viskoser Fluß
- lässt sich auf  $\alpha \neq 0$  erweitern (siehe v)
- DGL zweiter Ordnung (Euler 1. Ordnung)
- nicht-linear: Im Allgemeinen nur numerische Lösung
- Randbedingung: Fluid ruht auf Oberflächen  
schwierig zu rechnen ⇒ experimentell (Reynolds)

- Zerlegung des Geschwindigkeitsfelds

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}_W$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 "Quellfeld"          "Wirbelfeld"

Beispiel: Magnus Effekt

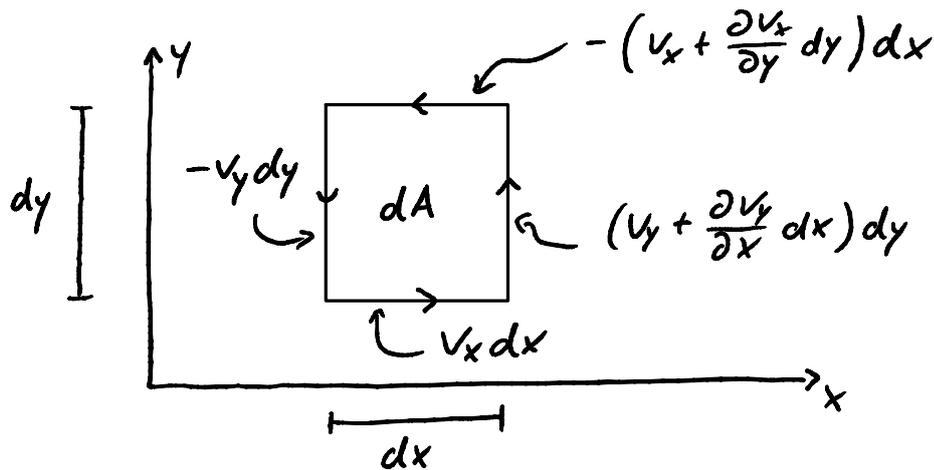


Mathematisch:  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$  (\*)

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 räumliche              räumliche Änderung  
 Änderung von  $|\vec{v}|$       der Richtung von  $\vec{v}$

Beweis: Komponentenweise hinschreiben

Zirkulation:  $Z \equiv \oint \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$



$$\Rightarrow dZ = \oint \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \underbrace{dx dy}_{dA}$$

$$\frac{dZ}{dA} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z$$

analog für x, y Komponente:

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

lokale Rotationsgeschwindigkeit

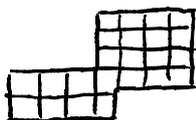
Warum  $\frac{1}{2}$ ? Betrachte starr rotierender Körper:

$$\vec{v} = \omega r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \omega r \vec{e}_\varphi \equiv v_\varphi \vec{e}_\varphi \quad \text{Zylinderkoordinaten}$$

Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \vec{e}_z = 2\omega \vec{e}_z \quad \text{andere Komponenten} = 0$$

Für große Fläche A mit Rand  $\partial A$  gilt:



Zerlegung in kleine Flächen, Ströme an gemeinsamen Grenzen addieren sich zu Null

$$\oint_{\partial A} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} \quad (\text{Satz von Stokes})$$

- Bernoulli aus Navier-Stokes

Wiederholung der Annahmen:

- "laminaire Strömung", jetzt präziser:  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ , wirbelfrei
- stationäres Feld:  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$
- Reibungsfrei:  $\eta = 0$
- inkompressibel:  $\kappa = 0$ ,  $\rho = \text{const}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\rho}_{=0} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) & \stackrel{\textcircled{*}}{=} \rho \left( \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \underbrace{\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{=0} \right) \\ & = \underbrace{\rho}_{\rho = \text{const}} \vec{g} - \vec{\nabla} p + \underbrace{\eta}_{=0} \vec{\nabla}^2 \vec{v} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}} - \vec{\nabla} p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left( p + \frac{\rho}{2} v^2 + E_{\text{pot}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow p + \frac{\rho}{2} v^2 + E_{\text{pot}} = \text{const} \quad \text{Bernoulli Gleichung} \quad \checkmark$$

↑  
nur |v| geht ein, keine Richtungsänderung

- Wirbelfreie Strömung: aus Potential  $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$  Potentialströmung

mit  $\rho = \text{const} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\dot{\rho} = 0$

Potential aus  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla}^2 \phi = 0$  + Randbedingungen

einfache Lösungsverfahren in 2D, holomorphe Funktionen

- Helmholtz'sche Wirbelsätze

$\eta = 0, \alpha = 0$ , betrachte "Rot von Grad"

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \psi = 0$$

beliebiges skalares Feld

siehe Potential  $\Rightarrow$  Kraftfeld  $\Rightarrow$  "Zirkulation"  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$\vec{\nabla} \times$  (Navier-Stokes):

$$\rho \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \vec{\nabla} \times \left( \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \right) = 0$$

$= -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}$       "Rot Grad" = 0  
 $\uparrow \eta = 0 \quad (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}^2 \vec{v} \neq 0)$

$$\rho \dot{\vec{\omega}} + \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \underbrace{\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{= 2\vec{\omega}} \right) = 0$$

$\Rightarrow$   $\dot{\vec{\omega}} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0$

• Bewegungsgleichung für Wirbelstärke  $\vec{\omega}$

• falls  $\vec{\omega}(t_0) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$

$\Rightarrow$  Wirbel können unter den gemachten Annahmen nicht entstehen oder verschwinden (Erhaltungssatz)

$\Rightarrow$  Wirbel entstehen in Regionen mit großer Reibung

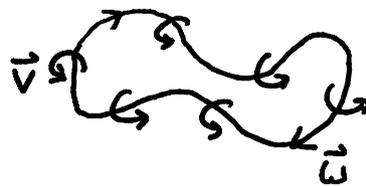
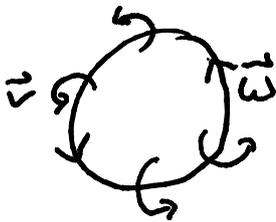
Betrachte "Div Rot"  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\varphi}) = 0$  für beliebiges  $\vec{\varphi}$

d.h.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$

$\Rightarrow$  Wirbel haben unter den gemachten Annahmen ( $\eta = \alpha = 0$ )

keine Quelle, d.h. kein Anfang oder Ende im Fluid.

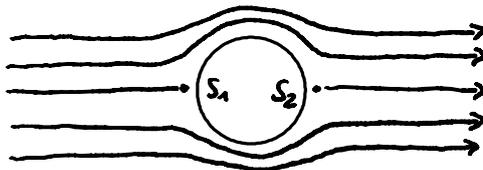
Wirbel sind geschlossen oder enden auf Oberfläche



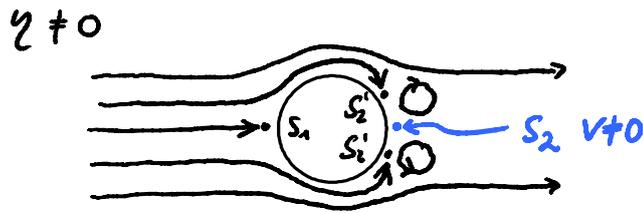
— Wirbelerzeugung

i) Newton'sche Reibung,  $C_w$ -Wert

$\eta = 0$



Strömung symmetrisch: Druck in Staupunkten  $S_1$  und  $S_2$  identisch  $\Rightarrow$  keine Kraft auf Körper.



Fluid kommt durch Reibung bereits in  $S_2'$  zur Ruhe  
 $\Rightarrow$  Kräftegleichgewicht gestört, Rückströmung, Wirbel

$\Rightarrow$  Turbulenz

Strömungswiderstand:

a) Bernoulli,  $\eta = 0 \Rightarrow$  kein Widerstand

keine gute Näherung in  
 Oberflächennähe (Prandtl)

b) laminarer Fluß,  $\eta \neq 0 \Rightarrow$  Stokes Reibung  
 Hagen - Poiseuille

$$F_R = -6(\pi) \eta R(L) \bar{v}$$

c) turbulenter Fluß,  $\eta \neq 0$  + Wirbel:

$$p(S_1) - p(S_2) \sim \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 A$$

↙ Querschnittsfläche

$$\Rightarrow \boxed{F_R = C_w \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 A} \quad \text{Newton'sche Reibung}$$

- $C_w$  = Widerstandsbeiwert, formabhängig
- Staudruck aber nicht Bernoulli wurde benutzt

Beispiele

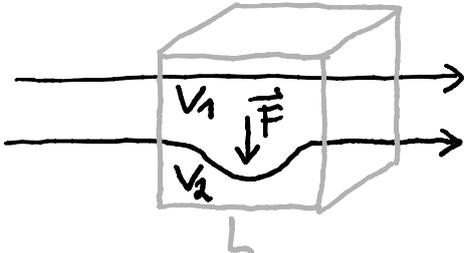
	$C_w$
	0,06
	0,4
	0,3...0,4
	1,4

ii) Instabilität, Turbulenzentstehung



laminare  
Strömung

+ Störung



$$v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1 \Rightarrow \vec{F}$$

$\Rightarrow$  Störung verstärkt sich selbst  $\Rightarrow$  Schwingung  
ohne Dämpfung: Instabilität

- Verstärkung durch Massenträgheit:  $\rho \bar{v} L^3$
- Dämpfung durch Reibung:  $\eta L^2$

$\Rightarrow$  erwarten Instabilität (Turbulenz) ab einem gewissen

$$\text{Wert für } \frac{\rho \bar{v} L}{\eta} = Re$$

Empirisch: Rohrströmung ab  $Re = 1000 \dots 2000$  turbulent  
mit  $L = \text{Rohrdurchmesser}$

## Zusammenfassung Reibung:

Hagen-Poiseuille/Stokes  
laminar,  $Re \leq 1000 \dots 2000$   
 $F_R \sim \bar{v}$

Newton Reibung  
turbulent,  $Re \geq 1000 \dots 2000$   
 $F_R \sim \bar{v}^2$

## - Skalierungsgesetz

charakteristische Größen:  $\bar{v}$ ,  $L$  und  $\rho$

definiere dimensionslose Größen:

$$t = t' T \quad \text{mit} \quad T = \frac{L}{\bar{v}} ; \quad \vec{v} = \bar{v}' \frac{L}{T} ; \quad \vec{\nabla} = \frac{1}{L} \vec{\nabla}'$$

$$\rho = \rho' \frac{L^2 g}{T^2} \quad \left[ \frac{L^2 g}{T^2} \right] = \frac{m^2 kg}{s^2 m^3} = \frac{kg}{m s^2} = \frac{N}{m^2} = Pa ; \quad \vec{g} = \vec{g}' \frac{L}{T^2}$$

Navier-Stokes in diesen Einheiten:

$$\rho \left( \frac{L}{T^2} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \left( \frac{L}{T} \right)^2 \frac{1}{L} (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \right) = \rho \frac{L}{T^2} \vec{g}' - \frac{1}{L} \frac{L^2 g}{T^2} \vec{\nabla}' p' + \frac{1}{L^2} \frac{L}{T} \eta \vec{\nabla}'^2 \vec{v}'$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = \vec{g}' - \vec{\nabla}' p' + \underbrace{\frac{\eta}{\rho L^2}}_{= \frac{\eta}{\rho \bar{v} L} = \frac{1}{Re}} \vec{\nabla}'^2 \vec{v}'$$

skalierte Systeme werden durch identische Gleichung beschrieben falls sie die gleiche Reynoldszahl aufweisen.

$\Rightarrow$  Systeme mit gleicher Reynoldszahl verhalten sich ähnlich.

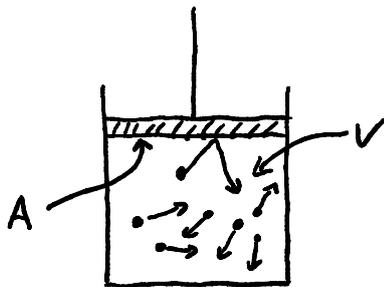
Experimentell mit Modellen

Schlußbemerkung: Aus Navier-Stokes viele qualitative Aussagen ohne eine einzige Lösung

## 12. Gase

- jetzt Statik; Dynamik bereits in Hydrodynamik
- Eigenschaften aus mikroskopischen Modell:

Teilchen, kleines Eigenvolumen, Brownsche Bewegung



Wärme:  $\vec{v}$  kein geordnetes Feld  
sondern stochastische Funktion!

- Bewegung der Teilchen ist Wärme und kann daher nicht in Wärme dissipiert werden!

– Mikroskopische Beschreibung des Drucks

Impulsübertrag:  $\Delta p_x = 2 m v_x$   $m =$  Teilchenmasse

$N$  Teilchen im Volumen  $V$ :

$$n = \frac{N}{V} \quad \text{Teilchendichte}$$

$$\rho = n m \quad \text{Massendichte}$$

Teilchenstrom:

$$\vec{j} = n \vec{v} \quad (\text{statt } \vec{j} = \rho \vec{v} \text{ Massenstrom})$$

$$\text{auf Kolben: } j A = \frac{1}{2} n v_x A$$

↑ nur Teilchen mit  $v_x < 0$

Kraft = Impulsänderung pro Zeit

$$\Rightarrow \text{Kraft auf Kolben: } F = \underbrace{j A \Delta p_x}_{\substack{\uparrow \\ \text{Teilchen pro Zeit}}} = A n m v_x^2$$

$$\text{mittlerer Druck: } p = \frac{F}{A} = n m \overline{v_x^2} \quad (*)$$

$\overline{v_x^2} = ?$  Benötigen Verteilung von  $v_x^2$

bzw.  $E_{\text{kin},x} = \frac{m}{2} v_x^2$  (Kinetische Energie in x-Richtung)

- Statistik von  $E_{\text{kin},x}$  bzw.  $v_x^2$

Wahrscheinlichkeit bei einem zufällig heraus gegriffenem Teilchen die Energie  $E$  zu messen:  $p(E) = ?$

Betrachte elastischen Stoß von Teilchen mit  $E_1$  und  $E_2$ :

$$\Rightarrow E_1 + E_2 = E_1' + E_2' \quad (a)$$

$\uparrow$  vor       $\uparrow$  nach dem Stoß

Wahrscheinlichkeit für diesen Stoß  $\sim p(E_1) p(E_2)$

Gleichgewicht: Rückwärtsprozess gleich wahrscheinlich:

$$\Rightarrow p(E_1) p(E_2) = p(E_1') p(E_2') \quad (b)$$

$$(a) \wedge (b) \Rightarrow p(E) \sim e^{-\text{const} E}$$

- $[const] = \text{Energie}$
- negatives Vorzeichen wegen Normierbarkeit

Definition:  $const = \frac{1}{kT}$

$$p(E) \sim e^{-E/kT}$$

Boltzmann Verteilung

$p(E) = \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$

- Bisher: gesamte Mechanik aus  $F=ma$  + Kraftfelder
- Jetzt: ein neues Konzept: Temperatur (Wärme)
- $p(E)dE = \text{Wahrscheinlichkeit Energie im Intervall } E \dots E+dE \text{ zu messen.}$
- $T = \text{Temperatur, } [T] = \text{Kelvin, } T=0K = -273,15^\circ C$
- $k = \text{Boltzmann Konstante} = 1,3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- Herleitung in der Thermodynamik (T4)
- Universell gültig im thermischen Gleichgewicht.
- Achtung:  $p(E)$  erst nach Normierung verwendbar

z.B.  $\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE = kT \Rightarrow p(E) = \frac{1}{kT} e^{-E/kT}$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE = kT$$

- gemittelte kinetische Energie entlang x:

$$p(v_x) \sim e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

$$\Rightarrow p(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

$$\Rightarrow \overline{v_x^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{kT}{m}$$

$$\text{in } (*) : p = nm \overline{v_x^2} = nkT = \frac{N}{V} kT \quad (\text{Druck})$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = NkT \text{ bzw. } p = nkT} \quad \text{Allgemeine Gasgleichung (für ideales Gas)}$$

- Reduktion der Mechanik von typ.  $10^{23}$  Massenpunkten auf nur 3 makroskopisch messbare Größen:  $p, V$  und  $T$ .
- Experimentelle Überprüfung war wichtige Stütze der Atomtheorie (gleich).
- Gültig für alle Teilchen ohne Eigenvolumen und Wechselwirkung außer Stöße. Korrektur: Van-der-Waals Gleichung.

Beispiel: He bei Normalbedingung ( $T = 273,15 \text{ K}$ ,  $p = 1013 \text{ hPa}$ )

$$R = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m} \quad n = \frac{p}{kT} = 2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{mittlerer Abstand der Atome } n^{-1/3} = 3,3 \times 10^{-9} \text{ m} \gg R$$

$$\Rightarrow \text{Pr\u00e4zision} \approx 1/30^3$$

• Molvolumen:  $N = N_A = 6,022 \times 10^{23}$  Avogadro-Zahl

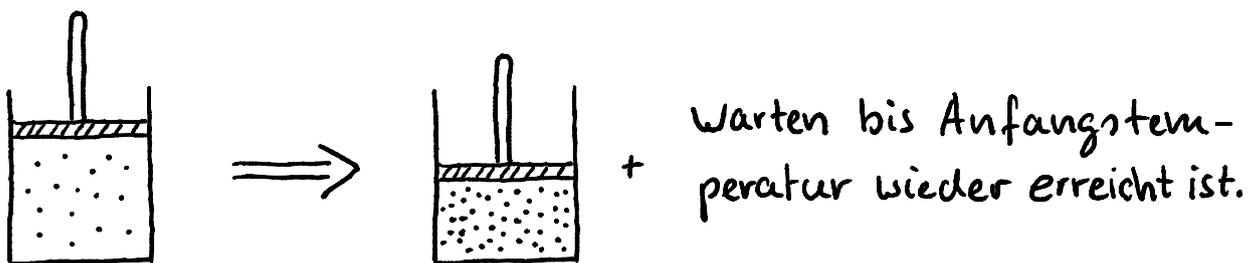
$$\Rightarrow V = N_A kT/p = 22,4 \text{ Liter (pro mol)}$$

(bei Normalbedingung)

- Zustands\u00e4nderungen:

im Allgemeinen kompliziert falls sich alle 3 Gr\u00f6\u00dfen  $p$ ,  $V$  und  $T$  \u00e4ndern. Vereinfachung: eine Gr\u00f6\u00dfe konstant.

i) Isotherme Zustands\u00e4nderung,  $T = \text{const}$

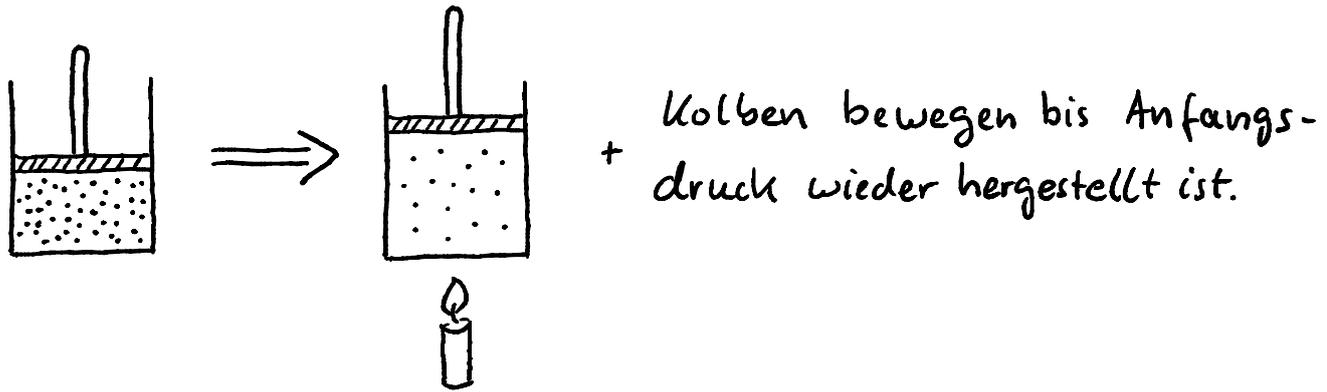


$$\Rightarrow pV = \text{const} \quad \text{Boyle - Mariotte (1662)}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial V} \Delta V = -\frac{1}{p} \frac{\text{const}}{V^2} \Delta V = -\frac{\Delta V}{V}$$

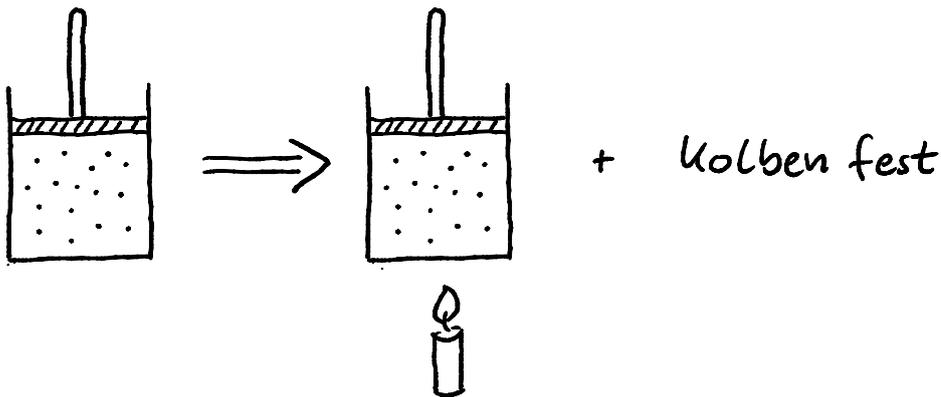
$$\text{Kompressibilit\u00e4t: } \kappa = \frac{1}{p}$$

ii) Isobare Zustandsänderung,  $p = \text{const}$



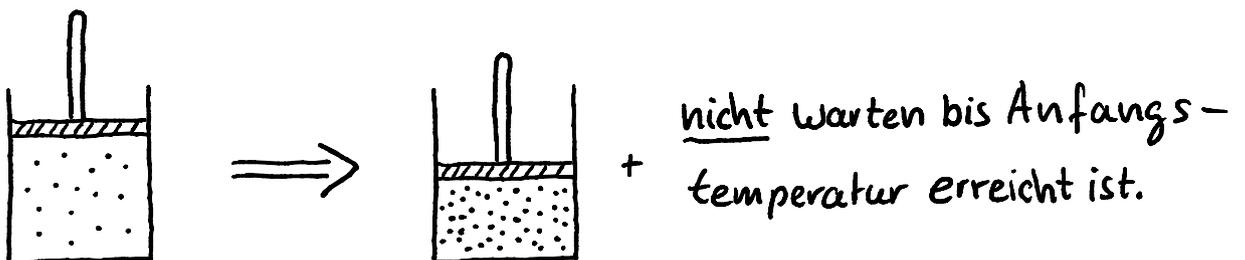
$$\Rightarrow \frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{Gay-Lussac}$$

iii) Isochore Zustandsänderung,  $V = \text{const}$



$$\Rightarrow \frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{Amontons}$$

iv) Adiabatische Zustandsänderung, Wärmeenergie = const



tritt häufig auf,  $p, V$  und  $T$  ändern sich.

ohne Beweis:  $p V^\alpha = \text{const}$

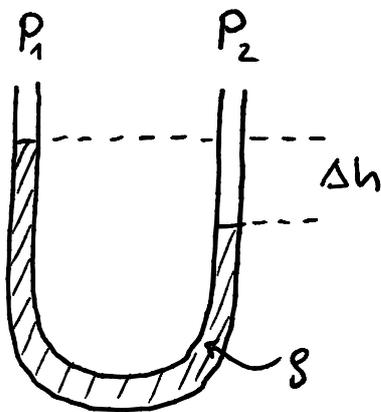
$$\alpha = \text{Adiabatenexponent} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$$

$c_p, c_v$  = Wärmekapazitäten

$f$  = Anzahl der Freiheitsgrade

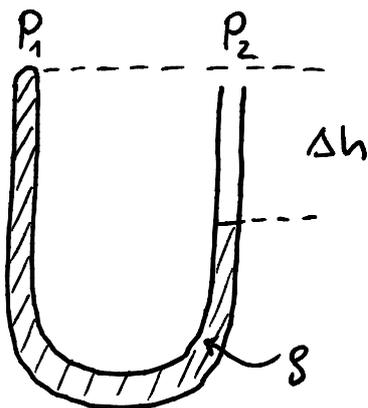
( $N_2$ :  $f=5 \Rightarrow \alpha=1,4$ )

— Sättigungsdampfdruck



offenes U-Rohr Manometer

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h$$



geschlossenes U-Rohr Manometer

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h$$

Wie groß kann  $\Delta h$  werden?

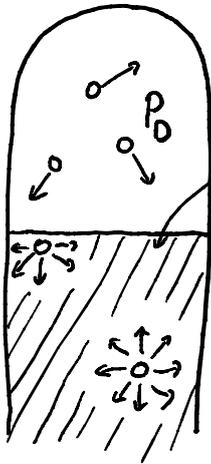
z.B.  $p_1 \approx 0$ ,  $p_2 = 1013 \text{ hPa}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  (Wasser)

$$\Rightarrow \Delta h = 10,3 \text{ m}$$

Quecksilber:  $\rho = 13546 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow \Delta h = 760 \text{ mm}$

praktikabler:  $1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ Torr} = 133 \text{ Pa}$

Was passiert im geschlossenen Ende ?



Atome mit großer Energie können Flüssigkeit verlassen:  $p_D = \text{Dampfdruck}$

- Energie um Teilchen an Oberfläche zu bringen:  $\sigma = \frac{W}{A}$
- Energie um Teilchen aus Oberfläche zu lösen:  $Q$

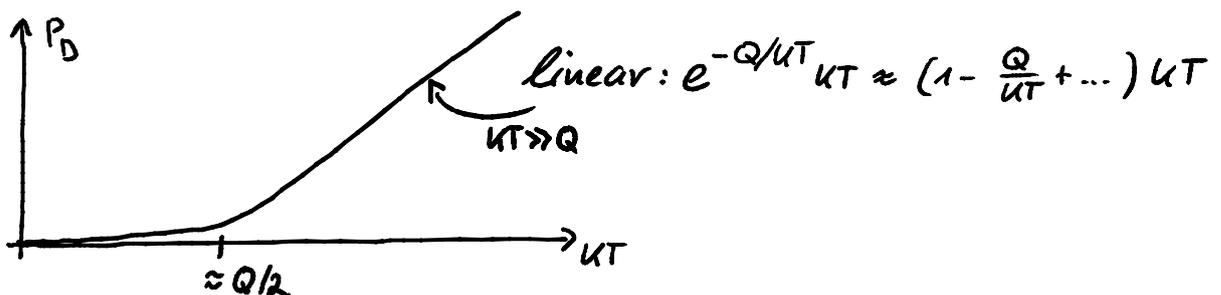
Boltzmann:  $\frac{n_D}{n_{Fe}} = e^{-Q/kT}$  (Keine Normierung nötig)

und  $p_D = n_D kT$

Dampf

Flüssigkeit

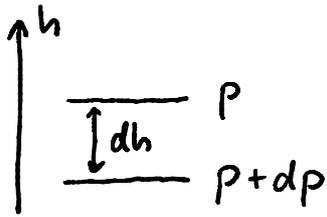
$\Rightarrow$   $p_D = n_{Fe} e^{-Q/kT} kT$  Dampfdruckkurve



- $Q$  aus gemessenen Dampfdruck (dazu muss allerdings die Entropieänderung berücksichtigt werden)

## - Schweredruck in Gasen

i) wie in Flüssigkeit, aber  $n \cdot m = \rho = \rho(h)$



$$T = \text{const} \Rightarrow p \sim \rho \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Referenzhöhe  $h=0$

$$dp = -\rho(h) g dh = -\frac{p}{p_0} \rho_0 g dh$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh' \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0}{p_0} g h$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}}$$

Barometrische Höhenformel

ii) mit Boltzmann

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-E/kT} = e^{-mgh/kT} = \frac{p}{p_0}$$

mit  $p_0 = n_0 kT = \frac{\rho_0}{m} kT$  identisch mit

$$\text{Erdatmosphäre: } \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1013 \text{ hPa}}{1,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 8,5 \text{ km}$$

$e^{-1} = 37\%$  des Luftdrucks auf Mount Everest.

## - Ergänzungen, Ausblick

### Quantenmechanik:

- Energie quantisiert  $E \rightarrow E_r \quad r = 1, 2, \dots$
- Teilchen ununterscheidbar
- 2 Typen von Teilchen:

Bosonen:  $n_r = \frac{1}{e^{+(E_r - \mu)/kT} - 1}$  Bose-Einstein Verteilung  
 $\uparrow$   
 $r = 0, \dots, \infty$

Fermionen:  $n_r = \frac{1}{e^{+(E_r - \mu)/kT} + 1}$  Fermi-Dirac Verteilung  
 $\uparrow$   
 $r = 0, \dots, 1$

$n_r$  = mittlere Anzahl der Teilchen mit Energie  $E_r$

$\mu$  = chemisches Potential, über  $\sum_r n_r \stackrel{!}{=} N$

Klassisches Limit:  $n_r \ll 1$ , keine Entartung

$\Rightarrow e^{+(E_r - \mu)/kT} \gg 1$  Boltzmann wie bisher

$\Rightarrow \frac{1}{e^{+(E_r - \mu)/kT} \pm 1} \approx \frac{1}{e^{+(E_r - \mu)/kT}} = e^{\mu/kT} e^{-E_r/kT} \sim e^{-E_r/kT}$

## - Entropie, gibt Richtung vor

Anzahl der Mikrozustände pro Makrozustand  $\equiv \Omega$   
 $\swarrow$   
 $(P, V, T)$

Entropie:  $S \equiv k \ln(\Omega)$

"Entropie nimmt zu"

$\Leftrightarrow$  "der wahrscheinlichste Makrozustand tritt ein"

## 13. Nichtlineare Dynamik und Chaos

- nichtlineare Differentialgleichungen (DGL)

• enthalten Terme wie  $y'^2$ ,  $yy''$ ,  $y^2$  etc

• selten analytisch lösbar

• keine Superposition von Lösungen

Beispiele: Navier-Stokes, enthält  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ , d.h.  $y'y$

Pendel  $\varphi'' + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$ , enthält  $y^3, y^5, \dots$

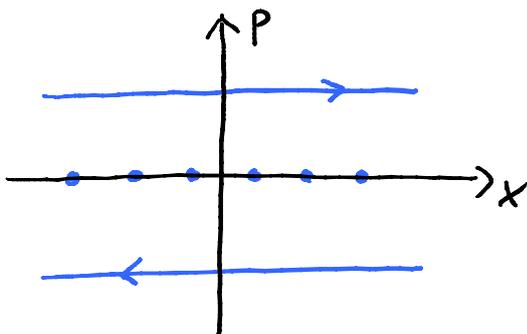
$$\uparrow \\ \mathcal{L} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}$$

- Phasenraum = Menge aller möglichen Zustände

Dimension = Anzahl der Freiheitsgrade =  $f$

Beispiele:

i) freien Teilchen / Massenpunkt



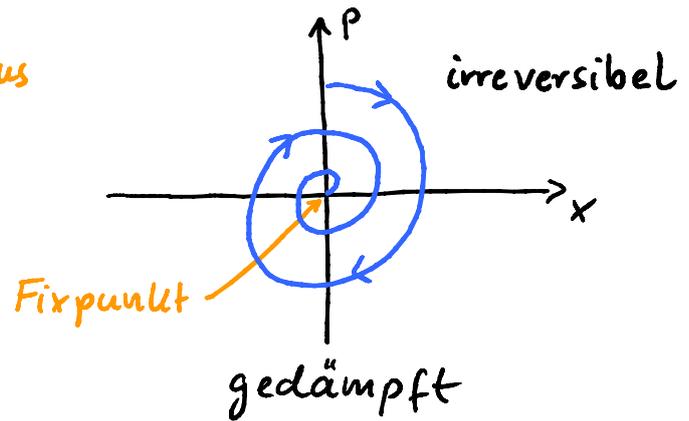
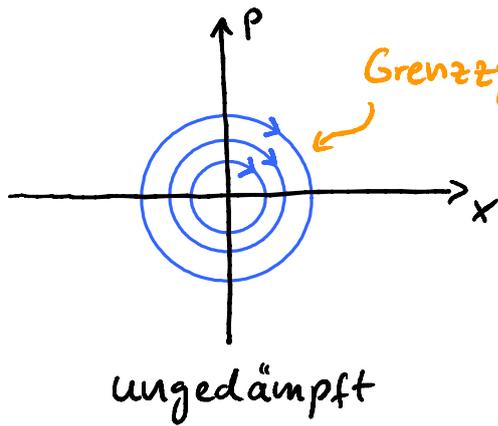
Trajektorie (deterministisch)

oder Phasenraumzelle:  $dx \frac{\square}{dp}$

Klassisch:  $\Delta p \Delta x = \text{const}$  (Liouville)

Quanten:  $\Delta p \Delta x \geq \hbar$

## ii) Harmonischer Oszillator



- Im vollständigen  $f$ -dimensionalen Phasenraum schneiden sich die Trajektorien nicht. (eindeutige Lösung der DGL)

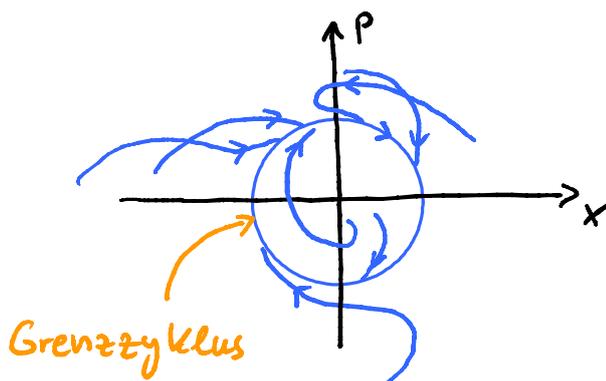
⇒ Trajektorien im  $f=2$  entweder auf Fixpunkt (auch  $\infty$ ) oder Grenzyklus.

⇒ für  $f > 2$  Grenzyklus ohne Fixpunkt oder Periode möglich.

Beispiel:  $N$  gekoppelte,  $N > 2$  nicht periodisch

Doppelpendel  $f = 4$

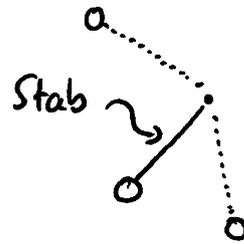
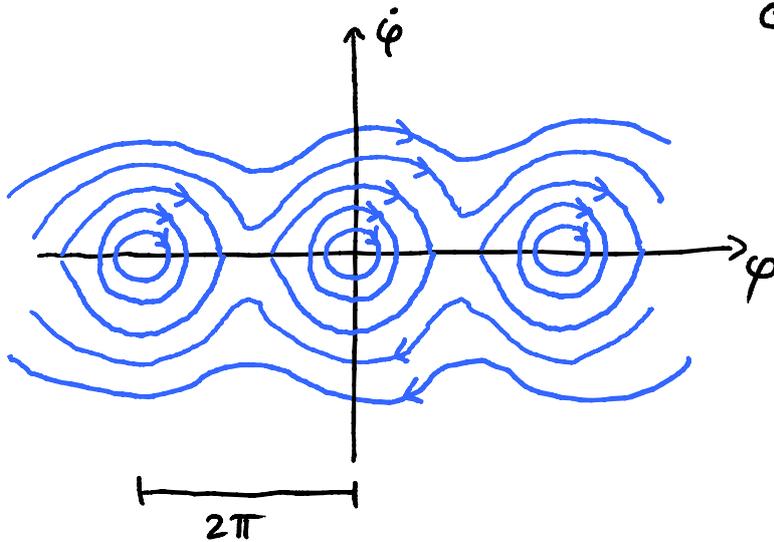
## iii) erzwungene Schwingung



Trajektorien können sich kreuzen weil zum gleichen  $(x, p)$  Phase  $\varphi$  der treibenden Kraft eine andere sein kann: voll ständiger Phasenraum ist 3 dimensional  $(x, p, \varphi)$

#### iv) nichtlinearer Oszillator

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$$



- Numerische Lösung von DGLn

Diskretisierung:

$$y' = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\Delta x} \quad \left( \text{auch } \frac{y(x_0) - y(x_1)}{\Delta x} \text{ etc.} \right)$$

$$y'' = (y')' = \frac{\frac{y(x_2) - y(x_1)}{\Delta x} - \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{\Delta x^2} \quad \text{etc.}$$

Beispiel:  $y'' + \omega_0^2 y = 0$

$$\Rightarrow \frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{\Delta x^2} + \omega_0^2 y(x_0) = 0$$

Iteration:  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n - \omega_0^2 \Delta x^2 y_n$  mit  $y_n \equiv Y(x_n)$

↖  
2. Ordnung DGL

2 Anfangsbedingungen  $y_0$  und  $y_1$ :

meist  $y_0$  und  $\frac{y_1 - y_0}{\Delta x}$

↖ Ort                      ↖ Geschwindigkeit

(siehe "Kepler.py")

Allgemein: DGL  $k$ -ter Ordnung:

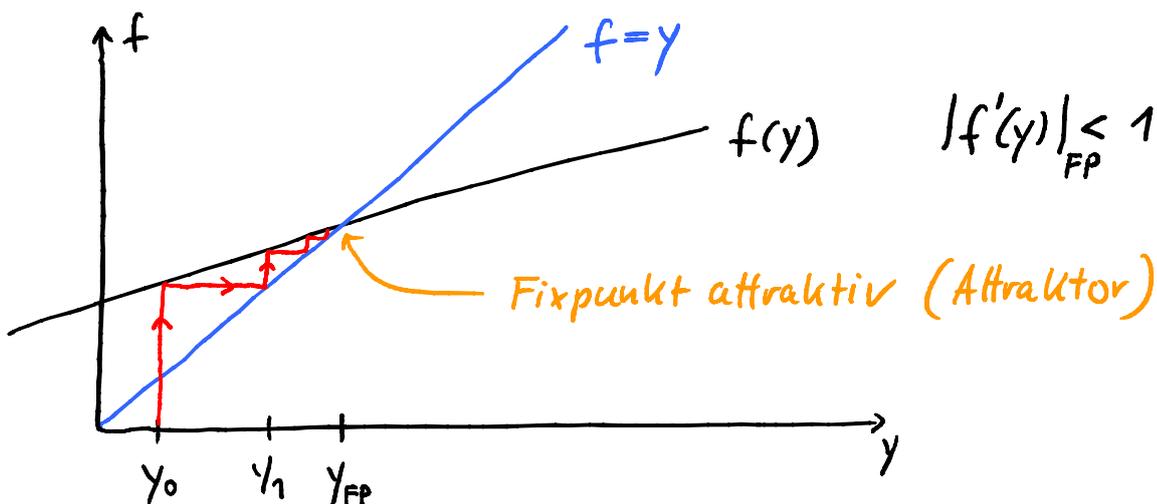
$$y_{n+k} = f(y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, \dots, y_n, y_{n+k-1}^2, y_{n+k-1} y_{n+k-2}, \dots)$$

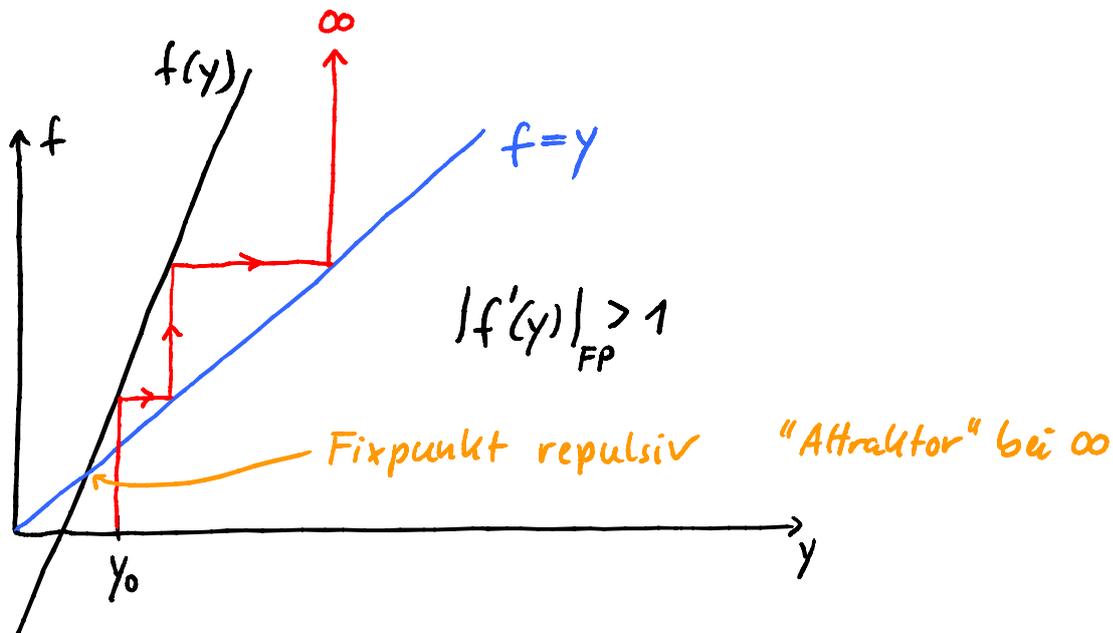
↖ z.B., alles außer  $y_{n+k}$

Dies ist die Basis für alle numerischen Integrationsverfahren,  
z.B. Runge-Kutta.

- DGL 1. Ordnung, linear

$y_{n+1} = f(y_n)$  Grafische Lösung (Verhulst Dynamik)





linear 1. Ordnung

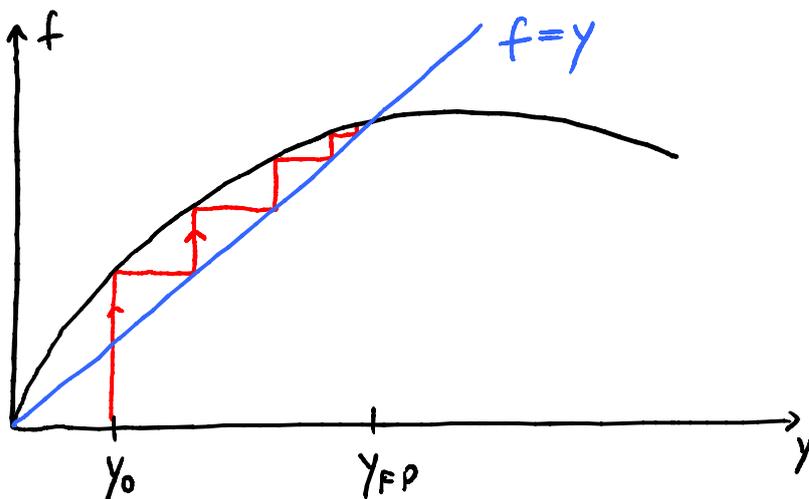
analytisch:  $y' + \alpha y + \beta = 0 \Rightarrow y(x) = e^{-\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha}$  Fixpunkt falls  $\alpha > 0$

diskret:  $\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} + \alpha y_n + \beta = 0 \Rightarrow y_{n+1} = \underbrace{(1 - \alpha \Delta x) y_n - \Delta x \beta}_{= f(y_n)}$

$f'(y) = 1 - \alpha \Delta x$  ( $\Delta x$  "sehr klein")

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha > 0 & \text{Fixpunkt attraktiv} \\ \alpha < 0 & \text{Fixpunkt repulsiv} \end{matrix} \quad |f'(y)|_{FP} \begin{matrix} \leq 1 \\ > 1 \end{matrix}$

- DGL 1. Ordnung, nichtlinear (z.B. Euler Kreisellgleichungen)

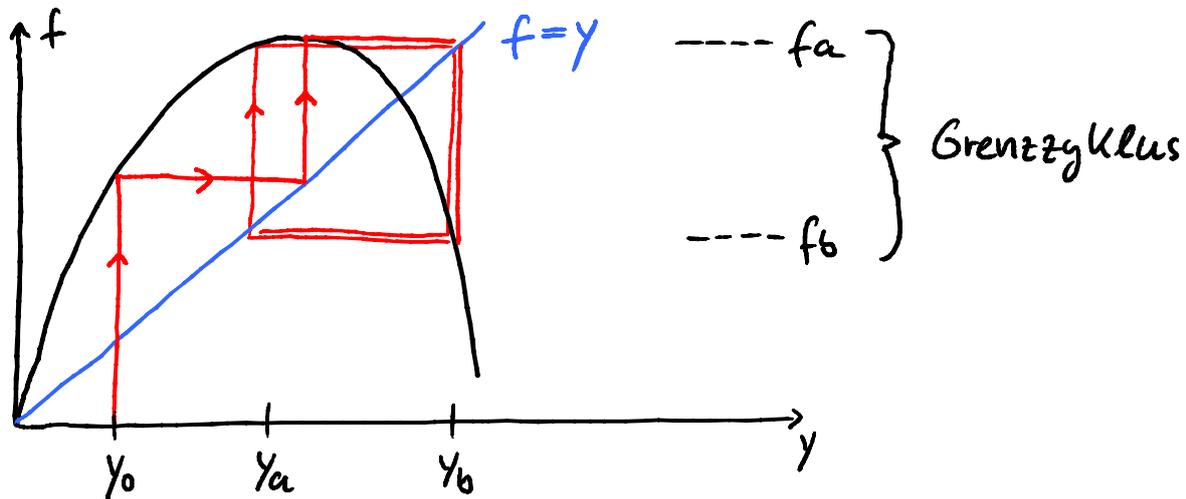


$|f'(y)|_{FP} < 1$

attraktiver Fixpunkt

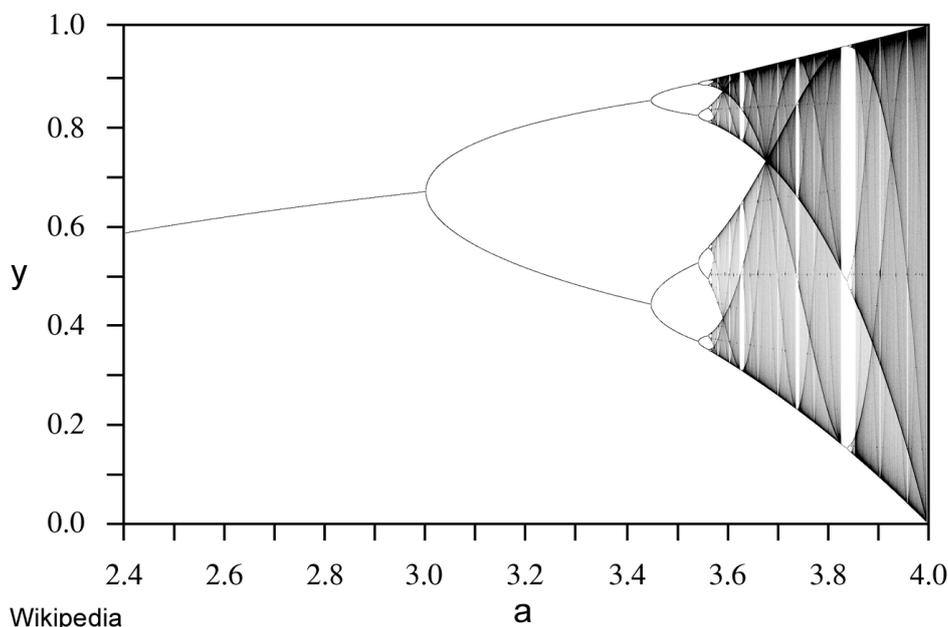
(Beispiel: Löse  $\cos x = x$  auf Taschenrechner)

repulsiver Fixpunkt für  $|f'(y)|_{FP} > 1$  erlaubt Grenzzyklus oder Chaos, je nach Art der Nichtlinearität:



Beispiel: "logistische Gleichung"  $f(y) = ay(1-y)$   
quadratisch,  $a = \text{Parameter}$   
für manche diskrete Prozesse (Populationen) exakt.

"Bifurkation": Übergang zum Chaos, Selbstähnlichkeit



## - Ljapunow-Exponent

DGL 1. Ordnung:  $y_1 = f(y_0)$ ,  $y_2 = f(y_1) = f(f(y_0))$  ....

$\swarrow$   $n$ -mal anwenden

$$\Rightarrow y_n = f^{(n)}(y_0)$$

Ist die Lösung stabil?

Kleine Störung der Anfangsbedingung:  $y_0 \rightarrow y_0 + \varepsilon$

nach  $n$ -Iterationen:  $|f^{(n)}(y_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(y_0)| \equiv \varepsilon e^{n\lambda}$  ( $\varepsilon > 0$ )

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \underbrace{\left| \frac{f^{(n)}(y_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(y_0)}{\varepsilon} \right|}_{\rightarrow \frac{df^{(n)}}{dy} \Big|_{y_0} \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} \right)$$

mit  $f^{(2)'}(y_0) = [f(f(y_0))]' = f'(f(y_0)) f'(y_0) = f'(y_1) f'(y_0)$

$$\text{folgt: } \frac{df^{(n)}}{dy} \Big|_{y_0} = \prod_{i=0}^{n-1} f'(y_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(|f'(y_i)|)}$$

Ljapunov  
Exponent

•  $\lambda < 0$ : Anfangsstörung  $\varepsilon$  wird gedämpft ( $\sim \varepsilon e^{n\lambda}$ )

$\Rightarrow$  DGL integrierbar bis  $n = \infty$

- $\lambda > 0$ : Anfangsstörung  $\varepsilon$  wächst exponentiell!

$\Rightarrow$  DGL nur bis  $n_{\max} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\delta Y}{\varepsilon}\right)$  integrierbar  
bevor Fehler größer als  $\delta Y$  wird.

$\Rightarrow \delta Y$  unbegrenzt  $\Rightarrow$  Chaos

- Theoretisch:  $\lambda > 0, \varepsilon = 0 \Rightarrow n_{\max} = \infty$ , in der Praxis aber nicht:

- Schwaches Kausalitätsprinzip:

Gleiche Ursachen ( $\varepsilon = 0$ ) haben gleiche Wirkung

Gilt auch bei Chaos

- Starkes Kausalitätsprinzip:

Ähnliche Ursachen ( $\varepsilon \neq 0$ ) haben ähnliche Wirkung

Gilt nicht bei Chaos

– Beispiele:

- Gravitation Mensch ( $m = 100 \text{ kg}, r = 1 \text{ m}$ ) auf Billiardkugel

$\Rightarrow$  nach 12 Stößen völlig anderes Ergebnis.

- Gravitation von Elektron am Ende des Universums auf  $O_2$

$\Rightarrow$  nach 56 Stößen (ca. 100 ns) völlig "anderes" Ergebnis.

- Kepler in unserem Sonnensystem:  $n_{\max} = 50 \text{ Myr}$

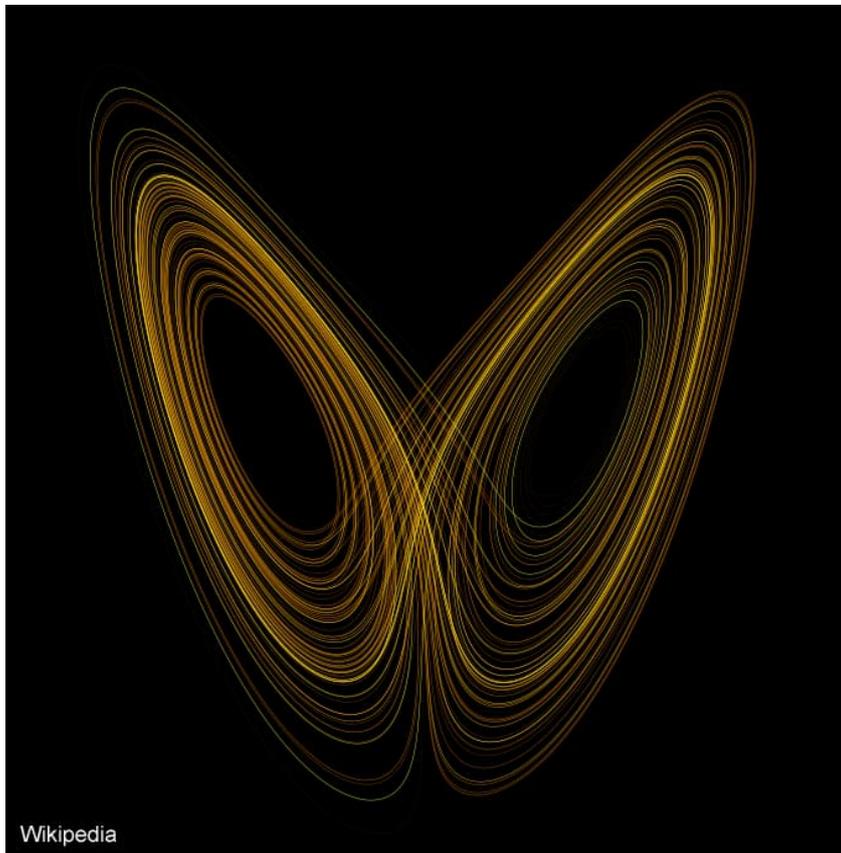
# - Ordnung im Chaos ("deterministisches Chaos")

$f$ -Dimensionen  $\Rightarrow$   $f$ -Ljapunow Exponenten

"seltsame Attraktoren" in manchen Systemen falls mindestens ein  $\lambda > 0$ : Attraktoren selbstähnlich mit fraktaler Dimension

Beispiel: Lorenz Attraktor (1963)

$$\dot{x} = a(y-x) \quad \dot{y} = x(b-z) - y \quad \dot{z} = xy - cz$$



$$a = 10$$

$$b = 28$$

$$c = 8/3$$



## - Grenzen der Berechenbarkeit

- zu viele Parameter  $\Rightarrow$  Statistik
- instabile Lösung  $\Rightarrow$  Chaos
- Quantenmechanik  $\Rightarrow$  Unschärferelation
- unbekannte Physik; Planck-Skala