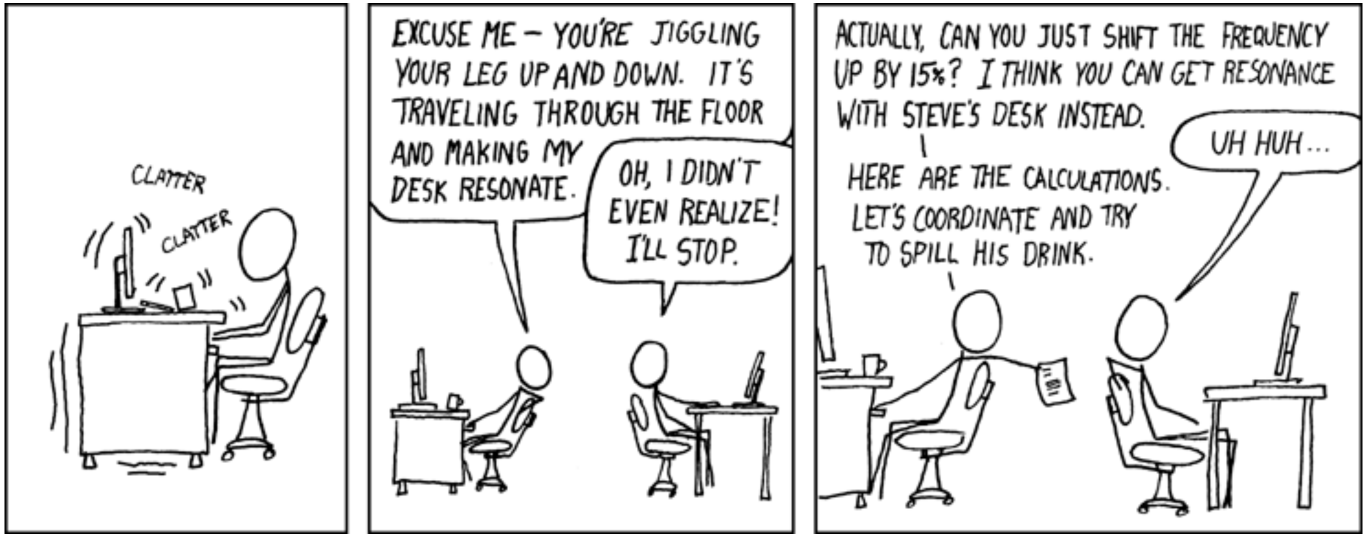
Good vibrations

Physik 1 für Chemiker und Biologen

9. Vorlesung



https://xkcd.com/228/

Heute: Schwingungen

- harmonisch
- gedämpft
- getrieben
- Resonanz

Schwingungen sind allgegenwärtig!

Pendeluhr

https://de.wikipedia.org/wiki/Pendeluhr

Stoßdämpfer

https://en.wikipedia.org/wiki/Shock_absorber

Quartzuhr

https://de.wikipedia.org/wiki/Quarzuhr

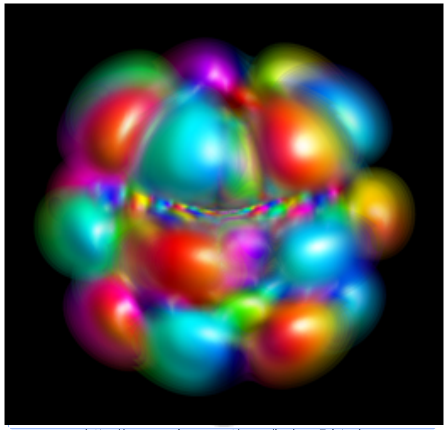
Lautsprecher

https://de.wikipedia.org/wiki/Lautsprecherbox

Funk und Fernsehen

http://de.freepik.com/fotos-vektoren-kostenlos/radio-icon
https://de.wikipedia.org/wiki/Radio

Quantenmechanik



http://vqm.uni-graz.at/qms/index-5.html

Schwingung $\hat{=}$ ein sich wiederholender Vorgang

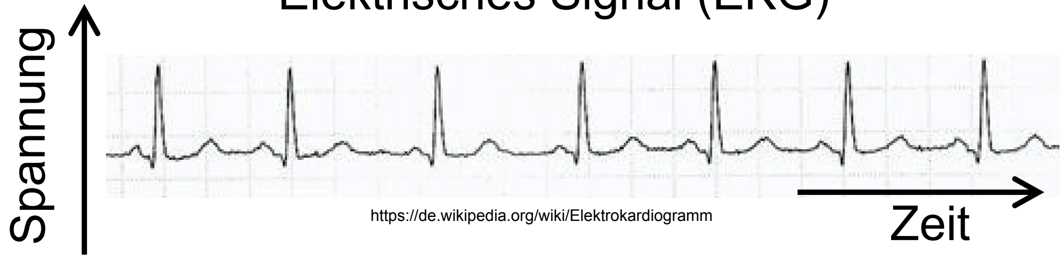
Schwingungen sind allgegenwärtig!

Viele physiologische Vorgänge zeigen oszillierendes Verhalten

Beispiel: Menschliches Herz

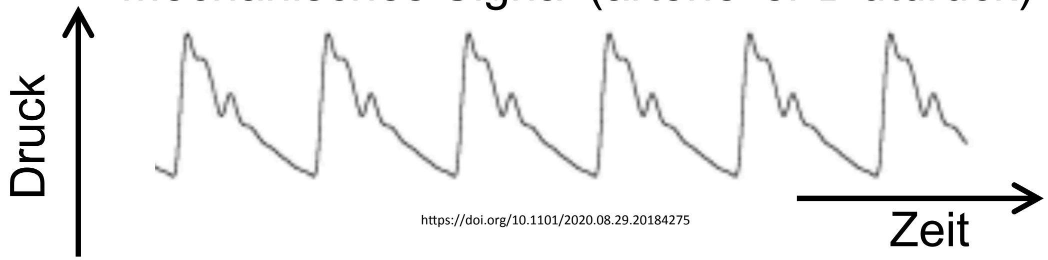
3D Modell des menschlichen Herzens

Elektrisches Signal (EKG)



https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrokardiogramm

Mechanisches Signal (arterieller Blutdruck)

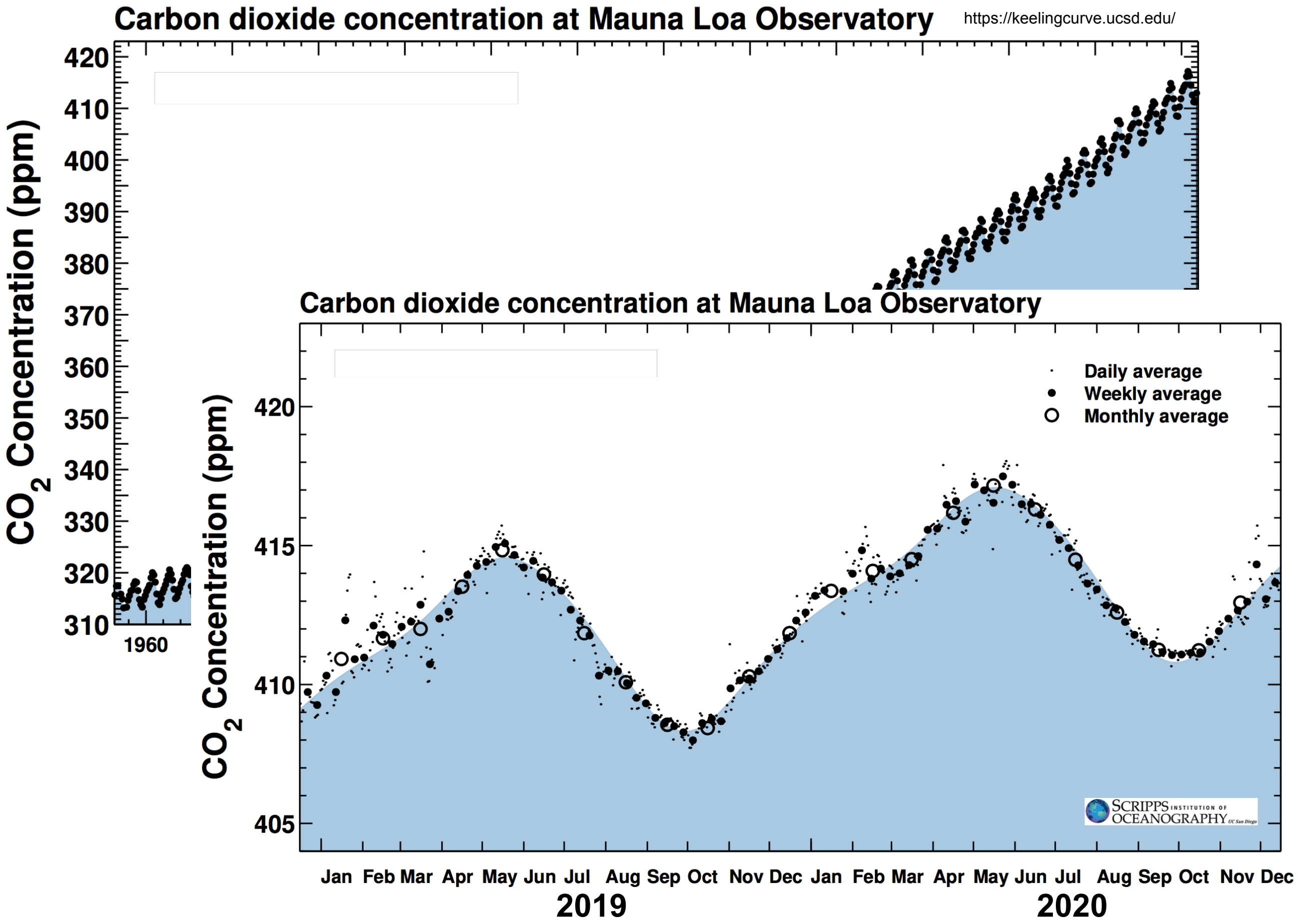


https://doi.org/10.1101/2020.08.29.20184275

Schwingungen sind allgegenwärtig!

Geophysikalische Vorgänge zeigen (z.B. jahreszeitliche) Oszillationen

Beispiel: „Keeling-Kurve“ der
CO_2 Atmosphärenkonzentration



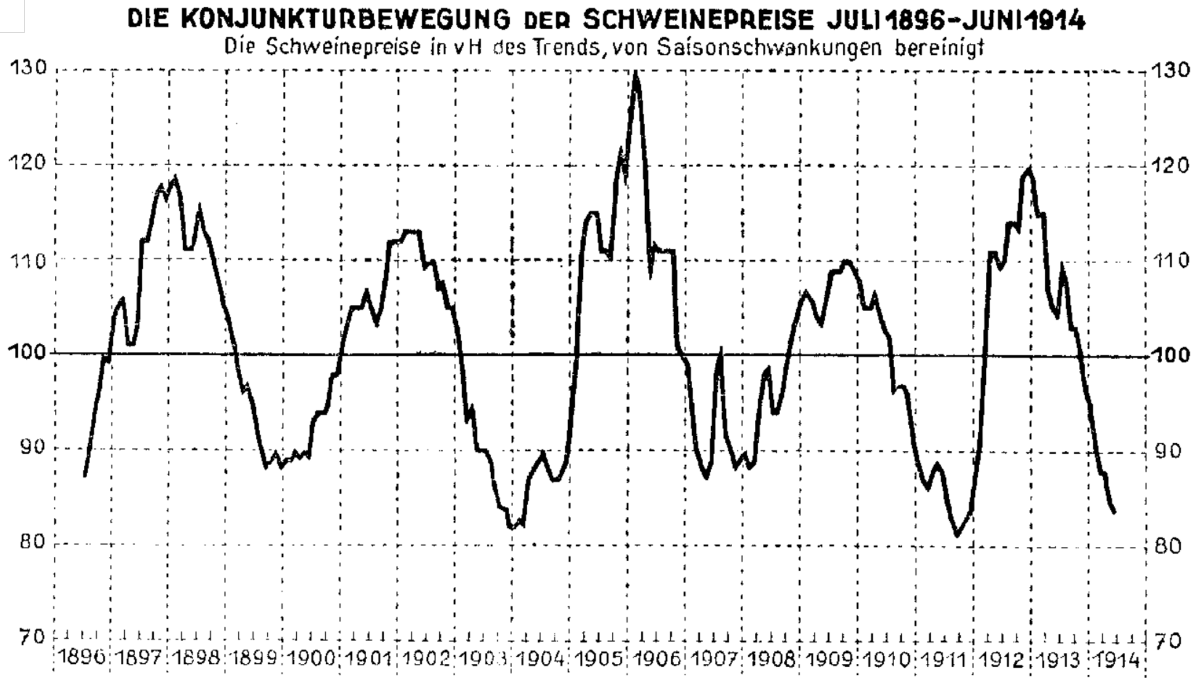
https://de.wikipedia.org/wiki/Charles_David_Keeling

Charles D. Keeling
(1928-2005)

Schwingungen sind allgegenwärtig!

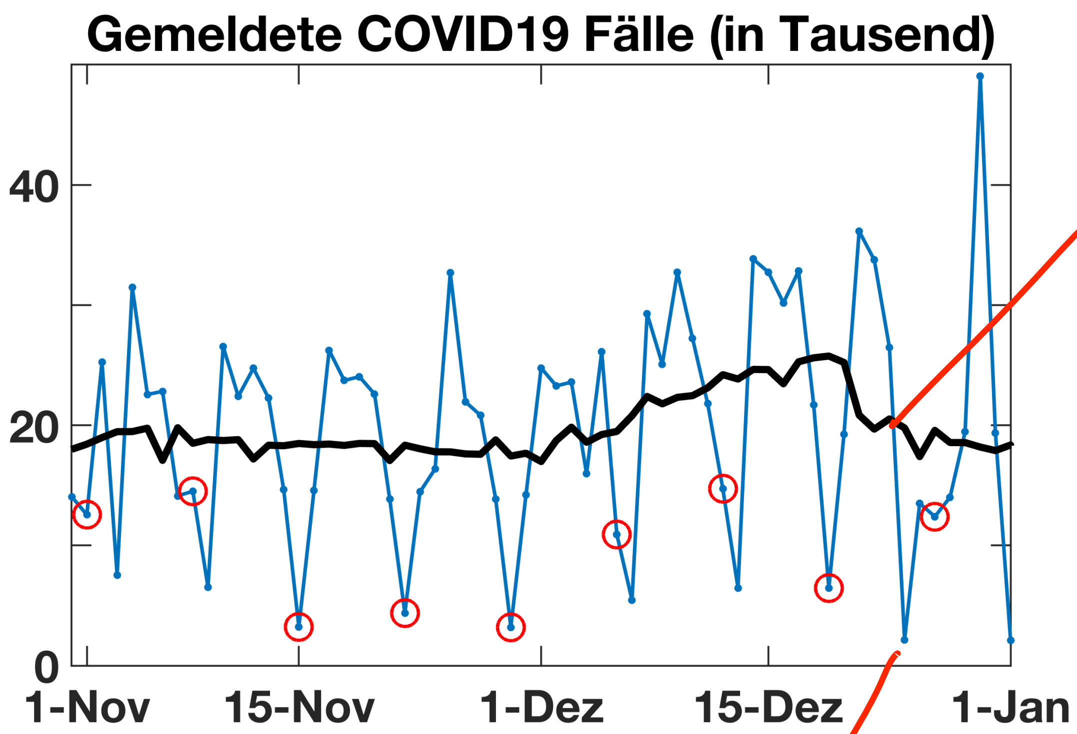
Sozio-ökonomische Systeme zeigen oft zyklisches Verhalten

„Schweinezyklen“ (Arthur Hanau, 1928)



Schwingungen sind allgegenwärtig!

Die Zahlen der gemeldeten COVID19-Fälle zeigen Schwankungen im Wochenrhythmus. Ein Beispiel für Oszillationen durch den Messprozess.

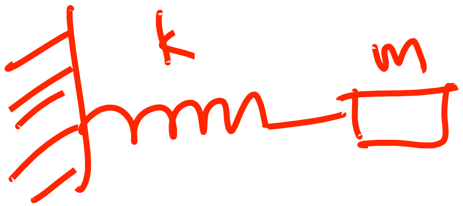


7 Tage Mittel

Weihnachten
(25.12.)

Harmonische Schwingungen

Experiment: Schwingung an Luftschiene



$m \to 10$ Schwingungen : $13{,}5\,s$

$2m \to 10$ Schwingungen : $19{,}1\,s$

Grundlegende Eigenschaften von Schwingungen:

Periode: T (in s)

Frequenz: f (in $\frac{1}{s} = Hz$) $f = \frac{1}{T}$

Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ (in $\frac{rad}{s}$)

Amplitude: A (in Einheiten des Vorgangs)

Erinnerung: Für eine harmonische Feder gilt, dass die Kraft ***F*** proportional zur Auslenkung ***x*** ist.

Harmonische Schwingungen: Mathematische Betrachtung

Aus Newtonscher Mechanik folgt:

1. Gesetze:

Newton:

$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$

Hooke:

$F_{Feder} = -kx$

2. Differentialgleichung (DG):

$m \cdot a = m \ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

3. Lösung der DG:

Ansatz: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$\dot{x}(t) = A \cdot \omega \cos(\omega t + \phi)$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Einsetzen:

$-A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + \phi) = 0$

Differentialgleichungen: In einer Differentialgleichung (DG) werden eine Funktion und ihre Ableitung(en) in Beziehung gesetzt.

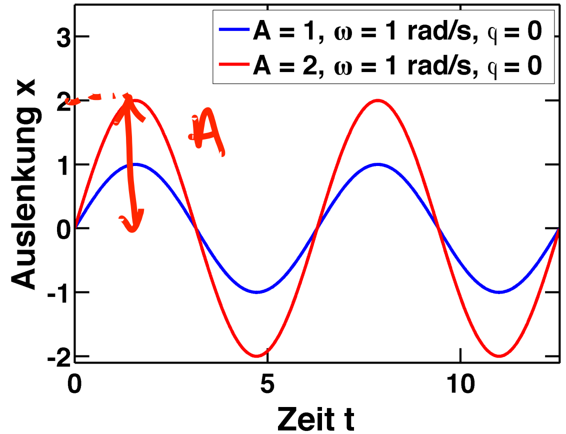
Gesucht: $x(t)$

Harmonische Schwingungen: Interpretation der Schwingungsfunktion

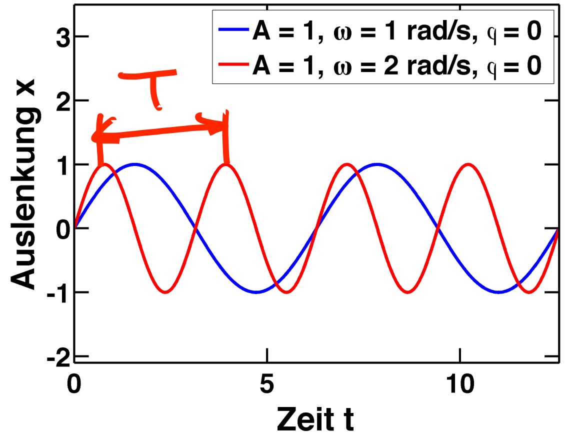
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Variiere:

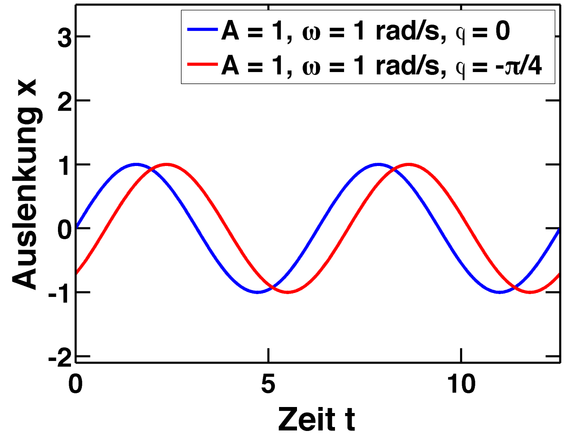
A



ω



ϕ

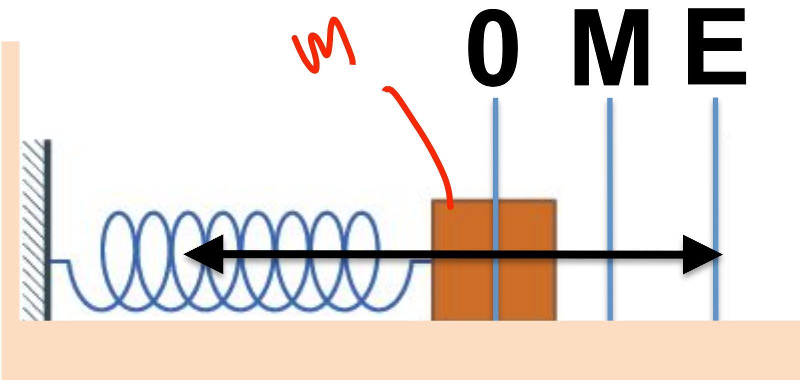


Kann ich auch $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$ nehmen?

Ja! Löst ebenfalls die Differential-gleichung

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

Verständnisfrage 1



https://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel

Eine Masse oszilliert an einer Feder auf einer reibungsfreien Oberfläche hin und her.
Position "0" ist die Ruhelage (ungedehnte Lage) der Feder.

An welcher Stelle ist die Beschleunigung der Masse maximal? (Betrag der Beschleunigung)

$F = m \cdot a = m\ddot{x} = -kx$

A) An Position „0".

$\Rightarrow a = -\frac{k}{m} x$

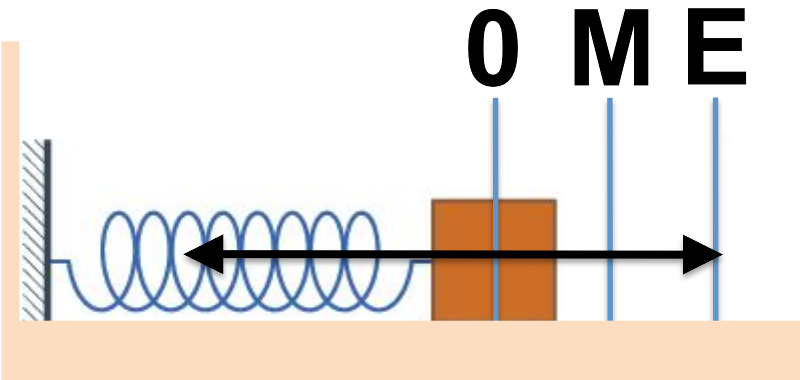
maximal für x maximal

B) An Position „M".

d.h. maximale Auslenkung

C) An Position „E". ✓

Verständnisfrage 2



https://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel

Eine Masse oszilliert an einer Feder auf einer reibungsfreien Oberfläche hin und her.
Position "0" ist die Ruhelage (ungedehnte Lage) der Feder.

An welcher Stelle ist die Gesamtenergie des Systems maximal?

A) An Position „0".

B) An Position „M".

C) An Position „E".

D) Die Gesamtenergie ist konstant. ✓

Energieerhaltung im harmonischen Oszillator

Harmonische Schwingung:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Erinnere:
$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$
$\omega^2 = k/m$

$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$

$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$

$E_{ges} = E_{mech} = E_{pot} + E_{kin}$

$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$

$= \frac{1}{2}kA^2\left(\underbrace{\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)}_{1}\right) = \text{const.}$

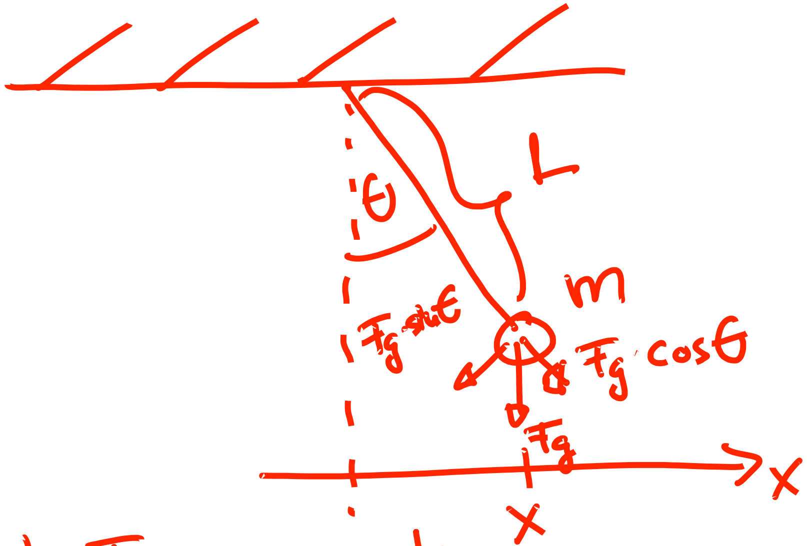
Erinnerung: Für ein abgeschlossenes System in dem nur konservative Kräfte wirken gilt der **Energieerhaltungssatz der Mechanik**:

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$

Pendel

Experiment: Fadenpendel

https://de.wikipedia.org/wiki/Pendeluhr



Rückstellkraft:

$$F = -m\cdot g \sin\theta$$
$$\approx -m\cdot g\cdot\theta$$
$$\approx -m\cdot g\,\frac{x}{L}$$
$$\approx -\frac{m\cdot g}{L}\cdot x$$

Vergleiche mit $F_{Feder} = -kx$

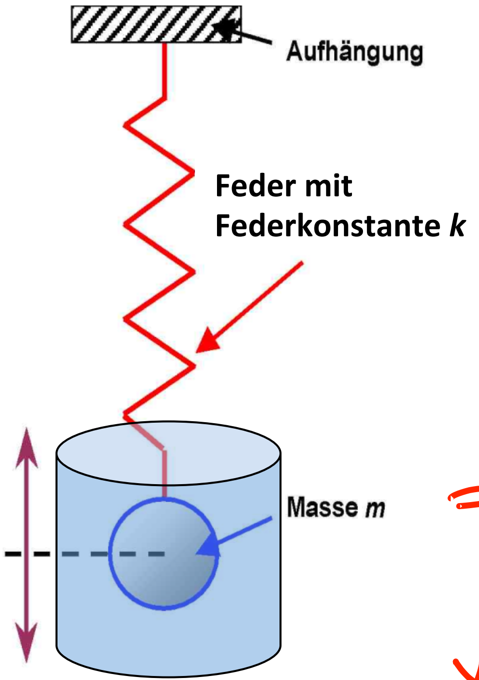
$$\Rightarrow k = \frac{m\cdot g}{L}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\cancel{m}\cdot g}{L}\,\frac{1}{\cancel{m}}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\cdot\sqrt{L/g}$$

Für $L = 1m \Rightarrow T \approx 2s$

Nichts schwingt für immer - Dämpfung



1. Gesetze (Stokes Reibung):

Newton: $F = m\ddot{x}$

Hooke: $F_{Feder} = -kx$

Reibung / Stokes: $F_{Reibung} = -b\dot{x}$

2. Modifizierte Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m} \text{ und } \delta = \frac{b}{2m}$$

3. Lösung der neuen DG:

$$x(t) = \hat{x}(t)\, e^{-\delta t}$$

$$= A \sin(\omega' t + \phi)\, e^{-\delta t}$$

mit $\omega'^2 = \omega^2 - \delta^2$

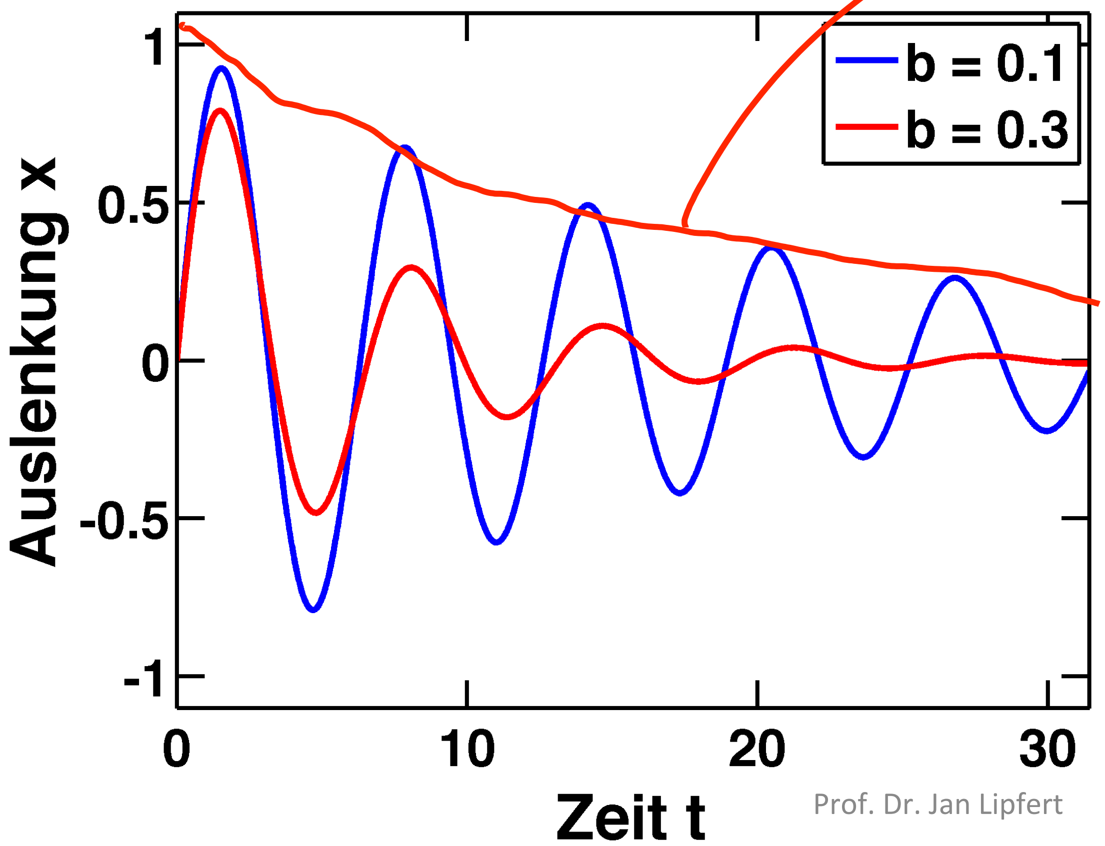
Experiment: Federpendel ungedämpft und gedämpft

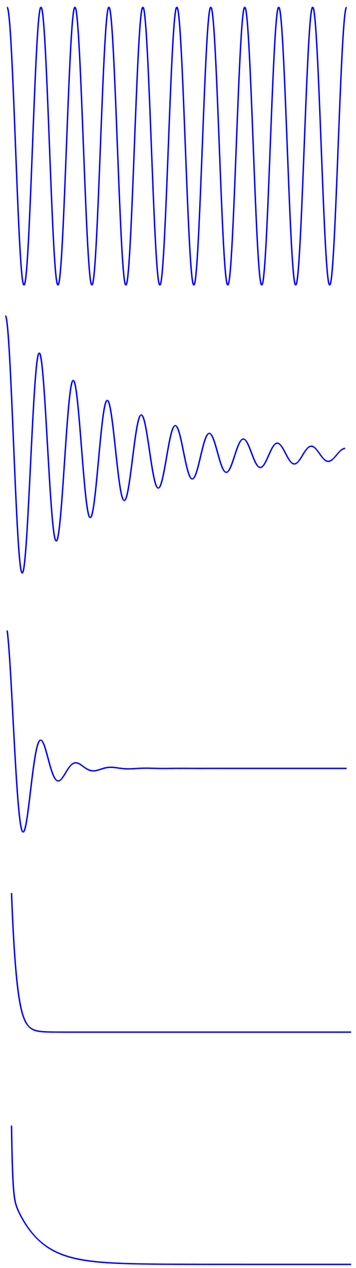
Dämpfung

Lösung der Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\delta t}}_{\text{zeitabhängige Amplitude}} \sin(\omega' t + \phi)$$

einhüllende Funktion $e^{-\delta t}$





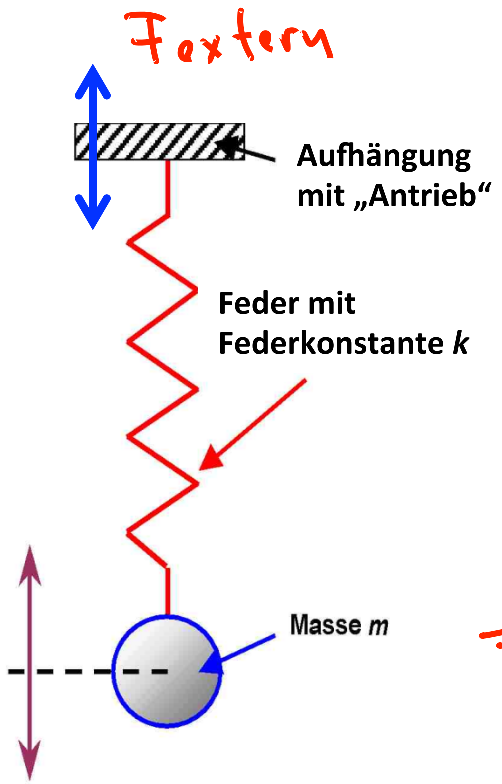
Grenzfälle der gedämpften Schwingung

$\delta = 0$ (d.h. $b = 0$) $\Rightarrow$ ungedämpfte Schwingung

$0 < \delta < \omega \Rightarrow$ Gedämpfte Schwingung „Schwingfall"

$\omega = \delta$ Kritische Dämpfung „Aperiodische Grenzfall"

$\delta > \omega$ überdämpfte Schwingung „Kriechfall"



Getriebene Schwingung

1. Gesetze (Feder, Antrieb):

Newton: $F = m\ddot{x}$

Hooke: $F_{Feder} = -kx$

$F_{Reibung} = 0$

$F_{extern} = F_0 \sin(\omega_e t)$

2. Modifizierte Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} = -kx + F_{extern}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_{extern}}{m} = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_e t)$$

3. Lösung der neuen DG:

$$x(t) = A\sin(\omega_e t + \phi)$$

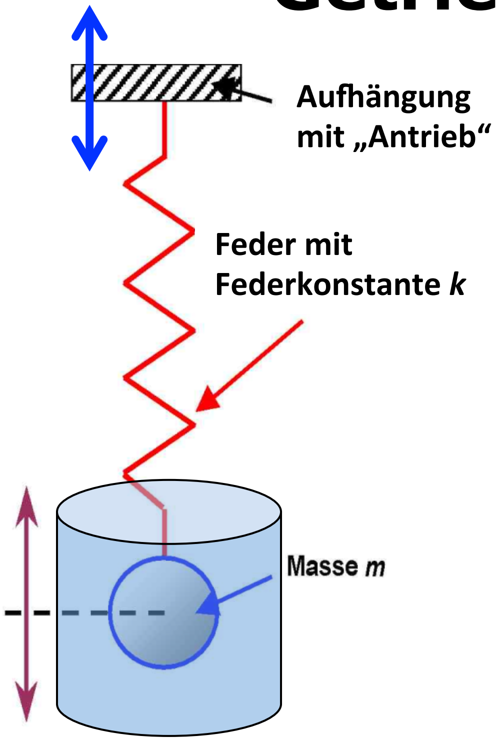
$$\ddot{x}(t) = -\omega_e^2 A \sin(\omega_e t + \phi)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_e^2} \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Experiment: Getriebenes Federpendel

F_{extern}

Getriebene Schwingung mit Reibung



1. Gesetze (Feder, Reibung, Antrieb):

Newton: $F = m\ddot{x}$

Hooke: $F_{Feder} = -kx$

Stokes: $F_{Reibung} = -b\dot{x}$

Extern: $F_{ext} = F_0 \sin(\omega_e t)$

2. Modifizierte Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_{extern}}{m} = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_e t)$$

3. Lösung der neuen DG: (nach Einschwingvorgang...)

$$x(t) = A \sin(\omega_e t + \phi)$$

$$A = \frac{F_0}{\left(m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + b^2\omega_e^2\right)^{1/2}}$$

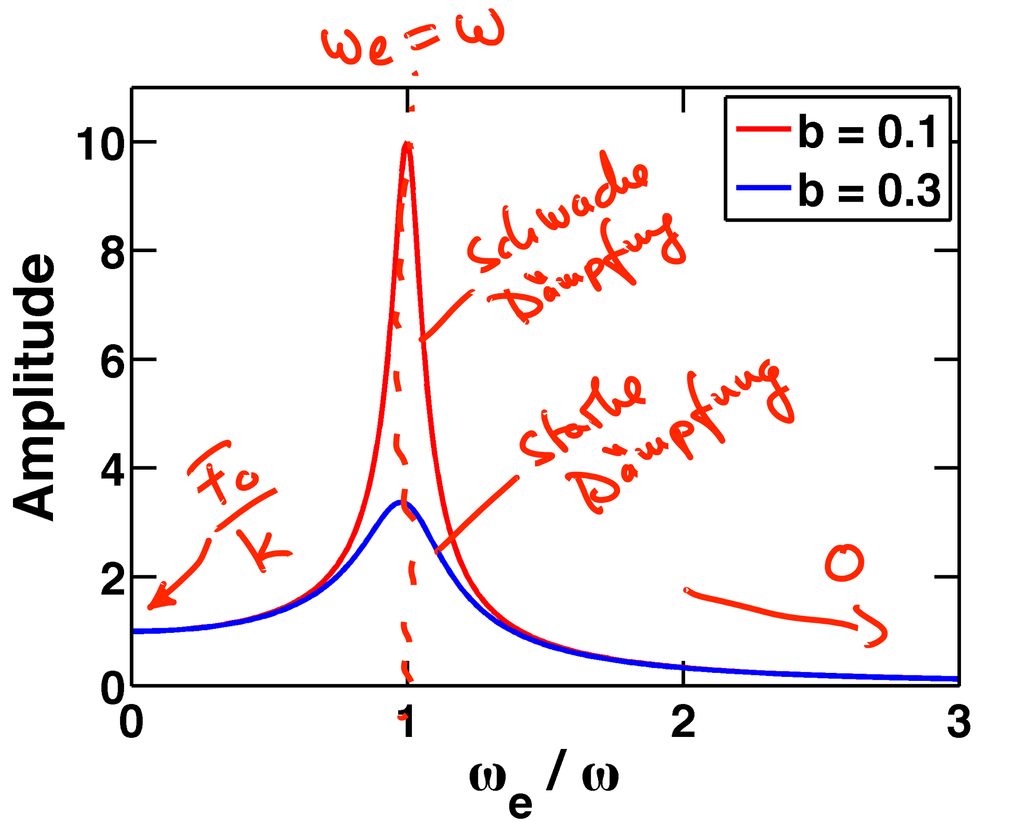
$$\tan\phi = \frac{-\frac{b}{m}\omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2}$$

Verhalten der getriebenen Schwingung

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + b^2\omega_e^2}}$$

Grenzfälle:

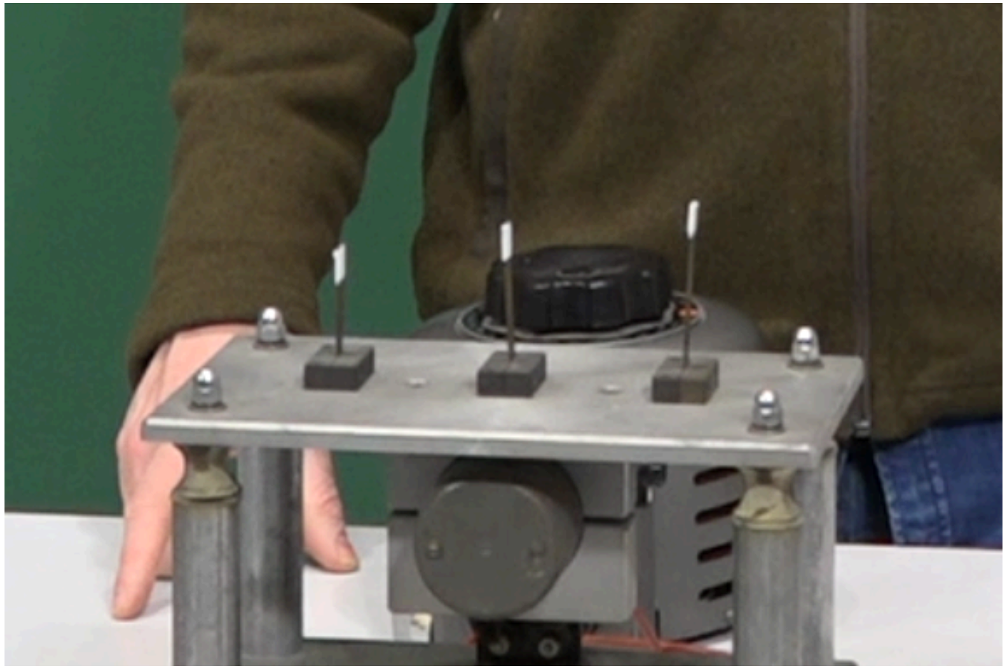
- $\omega_e \ll \omega$
  $\Rightarrow A \approx \frac{F_0}{K} = \text{const.}$
- $\omega_e \approx \omega \Rightarrow$ Amplitude maximal !
- $\omega_e \gg \omega$
  $\Rightarrow A \approx F_0/m\omega_e^2 \to 0$ für $\omega_e \to \infty$

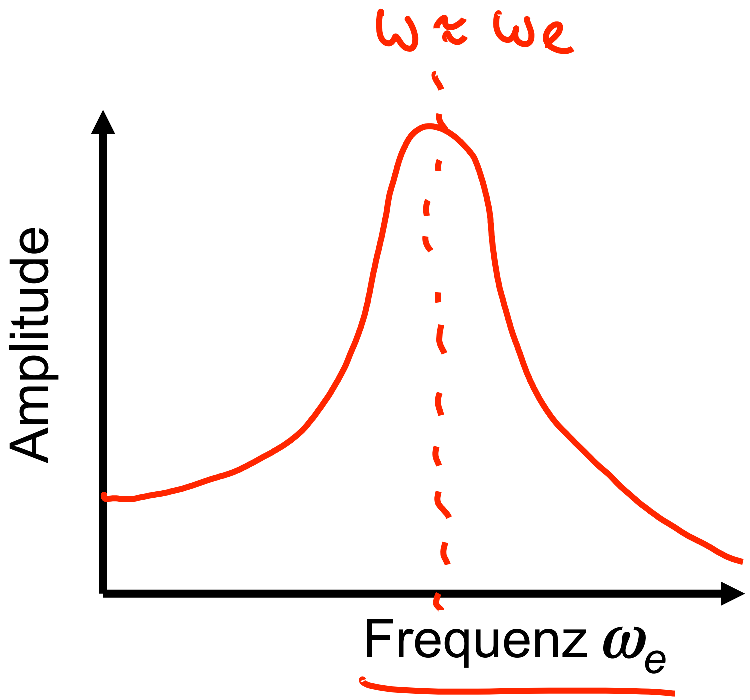


Experiment: Getriebenes Federpendel mit Dämpfung

Resonanz

Experiment: Anregung von Blattfedern

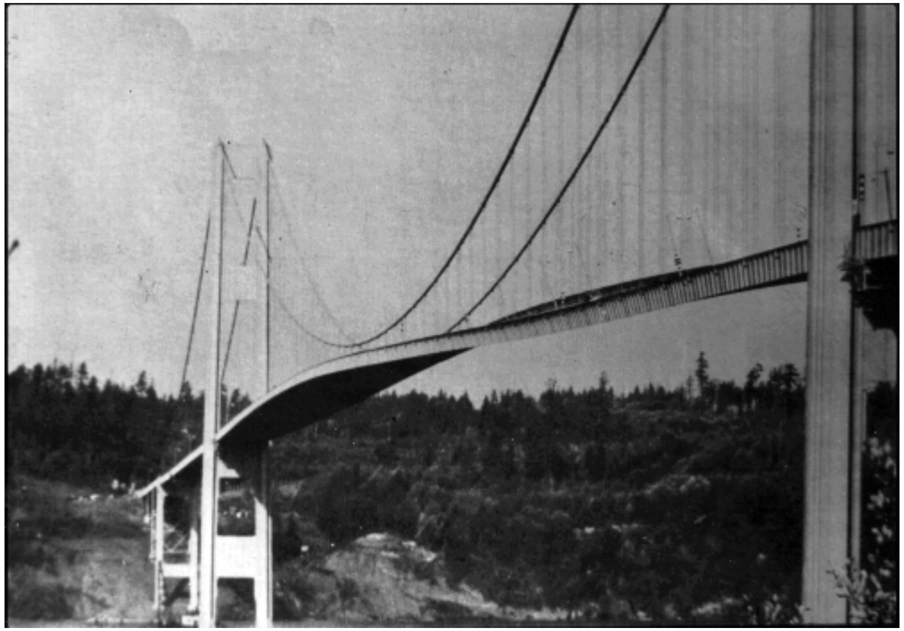




Änderung der Treiber-Frequenz ω_e
erlaubt Bestimmung der Eigenfrequenzen ω.
Für $\omega_e \approx \omega$ wird die Amplitude maximal!

Resonanz mit dramatischen Konsequenzen („Resonanzkatastrophe“)

Experiment: „Zersingen des Weinglases“



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Image-Tacoma_Narrows_Bridge1.gif

Tacoma Narrows Bridge (July 1 – November 7, 1940)

Film: Takomabridge
https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU

Zusammenfassung: Harmonische Schwingungen

System mit einer linearen Rückstellkraft, d.h. der Form

Rückstellkraft = − (positive Konstante) • (Auslenkung)

führt harmonische Schwingungen um seine Ruhelage aus. Mathematisch:

$$F = -kx$$ (Hooke) $$F = ma = m\ddot{x}$$ (Newton II)

Differential-Gleichung: $$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$ $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Lösungen: $$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$$ $$\boxed{i^2 = -1}$$

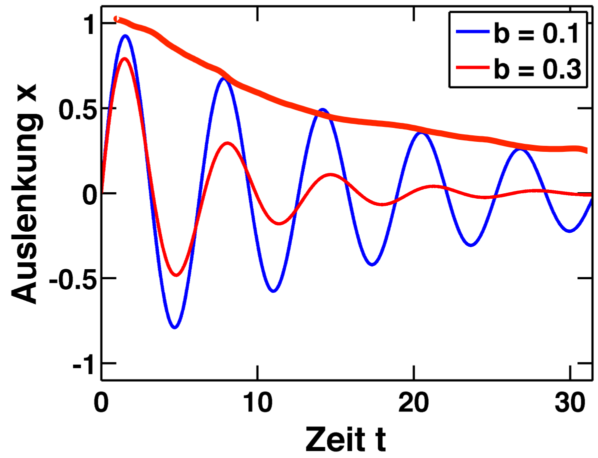
Zusammenfassung: Gedämpfte Schwingungen

Gedämpfte Schwingung:
System mit einer **linearen Rückstellkraft** und **linearen Reibungsterm**

$$F = ma = m\ddot{x} \qquad \text{(Newton II)}$$

$$F = -kx \qquad \text{(Hooke)}$$

$$F_{\text{Reibung}} = -b\dot{x} \qquad \text{(Stokes)}$$



Differential-Gleichung: $$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Lösung: $$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega' t + \phi)$$

$$\boxed{\delta = \frac{b}{2m}} \qquad \boxed{\omega'^2 = \omega^2 - \delta^2}$$