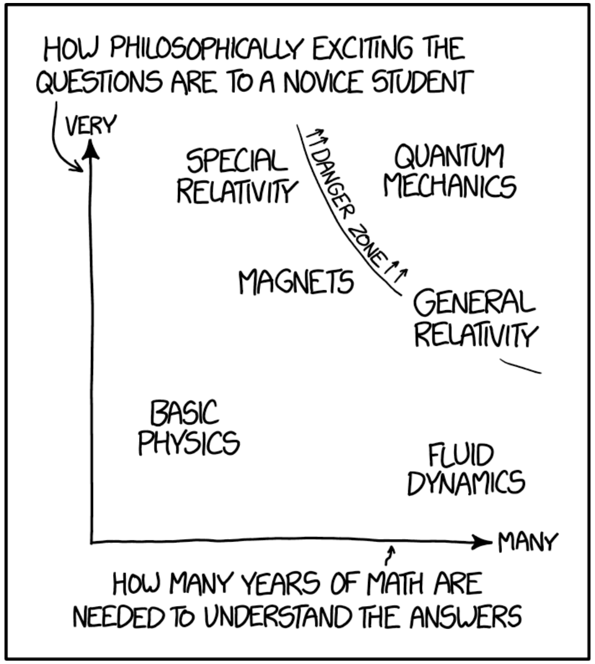
„Alles fließt“

Physik 1 für Chemiker und Biologen

8. Vorlesung



WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS

https://xkcd.com/1861/

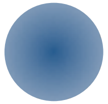
Heute: Fluide

- Druck und Auftrieb
- Bernoulli-Gleichung
- Viskose Fluide
- Kapillarkraft

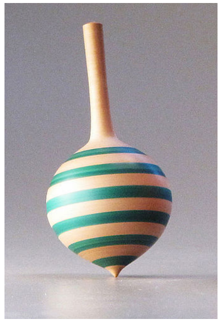
Massenpunkte, starre Körper, reale Körper

Bisher:

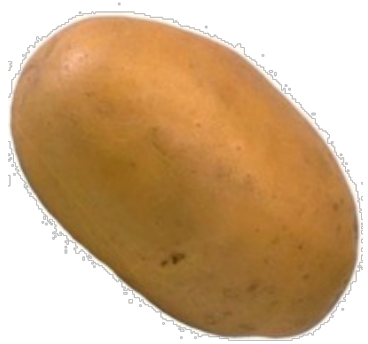
https://de.wikipedia.org/wiki/Baseball



1) Massenpunkte
(nur Translation)



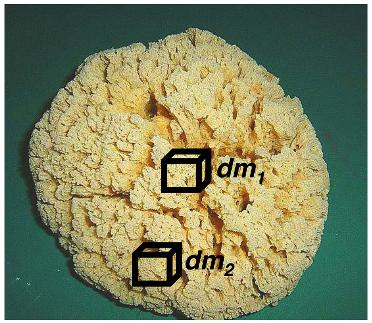
https://de.wikipedia.org/wiki/Kreisel



https://de.wikipedia.org/wiki/Kartoffel

2) Starre Körper
(Translation und Rotation)
Ändern Form unter äußeren Einflüssen (Kräfte, Drehmomente) nicht

3) Deformierbare Körper
(insbesondere Fluide)



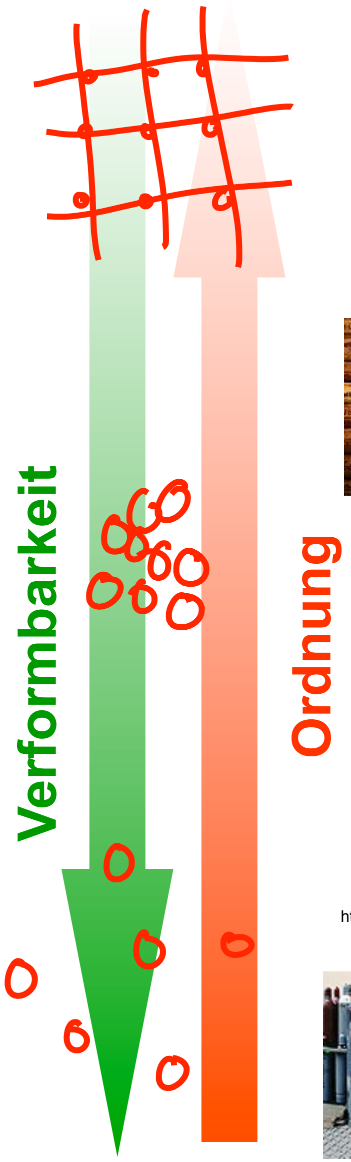
https://de.wikipedia.org/wiki/Badeschwamm

Mögliches Vorgehen:

- Einteilung im Massenelemente
- Kräfte zwischen den *dm*
- Integration

Besser: Neue Größen

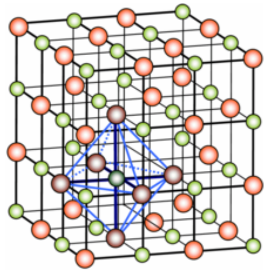
Deformierbare Körper




https://de.wikipedia.org/wiki/Diamant

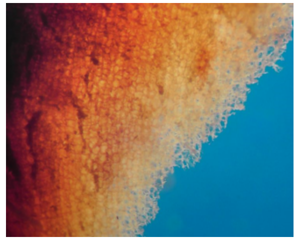
Kristalliner Festkörper

Inkompressibel und nicht verformbar d.h. sie behalten ihre Form und ihr Volumen - in gewissen Grenzen


https://de.wikipedia.org/wiki/Kristallstruktur


https://de.wikipedia.org/wiki/Korken

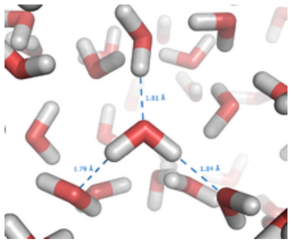
Amorpher Festkörper


https://de.wikipedia.org/wiki/Kork


https://de.wikipedia.org/wiki/Trinkglas

Flüssigkeiten

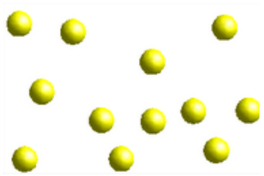
Inkompressibel, aber verformbar


https://de.wikipedia.org/wiki/Wasser


https://de.wikipedia.org/wiki/Gasflasche

Gase

Kompressibel und verformbar

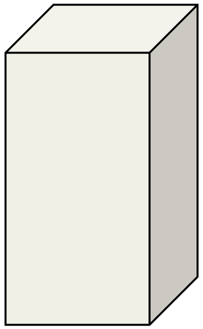

https://de.wikipedia.org/wiki/Gas

Typische Werte

	Dichte
Weltall	$10^{-27}\ \frac{kg}{m^3}$
Luft	$1\ \frac{kg}{m^3}$
Wasser	$1000\ \frac{kg}{m^3}$
Aluminium	$2700\ \frac{kg}{m^3}$
Queck-silber	$13600\ \frac{kg}{m^3}$
Neutronen-stern	$10^{17}\ \frac{kg}{m^3}$

Dichte

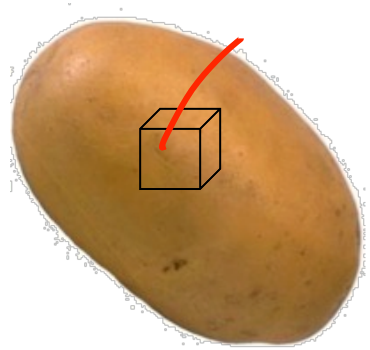
m



V

$$\rho = \frac{m}{V}$$

dm, dV



https://de.wikipedia.org/wiki/Kartoffel

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Einheiten:

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3} = 10^{-3}\ \frac{g}{cm^3}$$

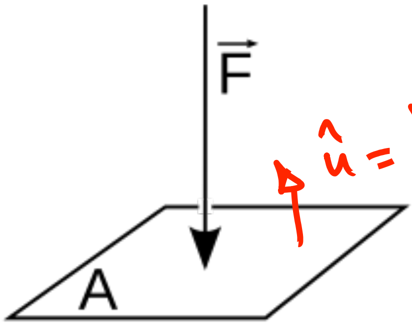
Druck

https://en.wikipedia.org/wiki/Pressure_measurement

$$p = \frac{F}{A}$$

https://als.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

Blaise Pascal
(1623 - 1662)



$\hat{n}$ = Normalen-vektor

SI Einheit:

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

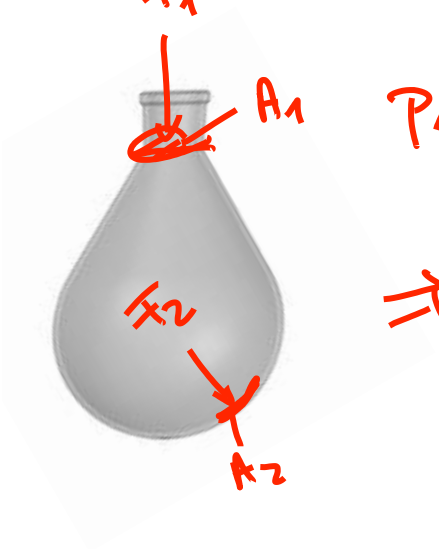
„Pascal"

Gebräuchliche (nicht SI) Druck-Einheiten:

bar	atm	psi (pounds per square inch)	Torr (mm Hg)
10^5 Pa	$1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa ≈ 1013 mbar	6894,76 Pa	133,322 Pa

Hydrostatischer Druck

Experiment:
Hydraulische Presse



$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

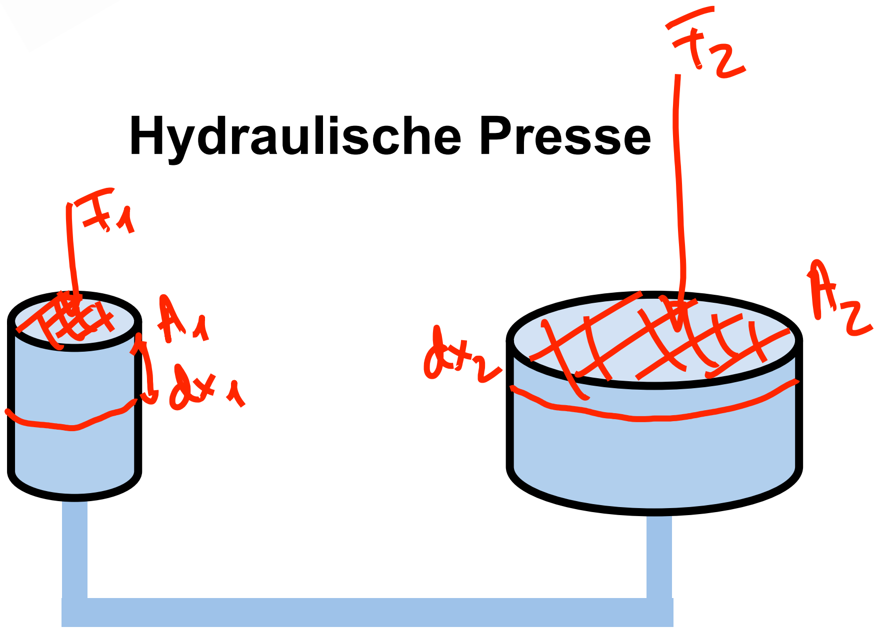
$$\Rightarrow F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

Betrachte Arbeit

$$dW = F_1 \cdot dx_1 = p\, A_1 dx_1 = p \cdot dV$$

$$\Rightarrow dx_2 = \frac{dV}{A_2} < dx_1 = \frac{dV}{A_1}$$

Hydraulische Presse



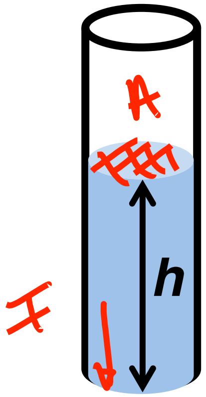
Hydrostatischer Druck & Schweredruck

Masse der Wassersäule:

$$m = \rho \cdot V = \rho A h$$

$$F = m \cdot g = \rho h \cdot A \cdot g$$

$$\Rightarrow p = \frac{F}{A} = \underline{\rho g h} \;\hat{=}\; \text{Schweredruck unter der Wassersäule}$$



Pascalsches Fass: Demonstration des hydrostatischen Paradoxons

https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_barrel#/media/File:Pascal%27s_Barrel.png

Experiment:
Hydrostatischer Druck

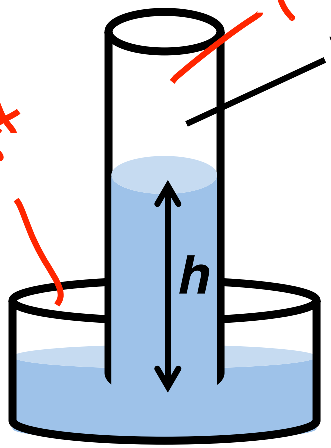
„Hydrostatisches Paradoxon"

Experiment:
Kommunizierende Röhren

Schweredruck & Atmosphärendruck

Torricelli-Barometer

$p = 0$



Vakuum = „Torricellische Leere"

p_{Luft}

https://de.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli

Evangelista Torricelli (1608-1647)

$$p_{Luft} \approx 10^5\,Pa = 10^5\,\frac{N}{m^2} \overset{!}{=} \rho\, g\, h$$

$$\Rightarrow h_{H_2O} \approx \frac{10^5\,N/m^2}{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 10\,m/s^2} \approx 10\,m$$

Für Quecksilber: $h_{Hg} \approx 760\,mm$

„Magdeburger Halbkugeln“

Demonstration des Luftdrucks durch Otto von Guericke (1656)

https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Magdeburg.jpg

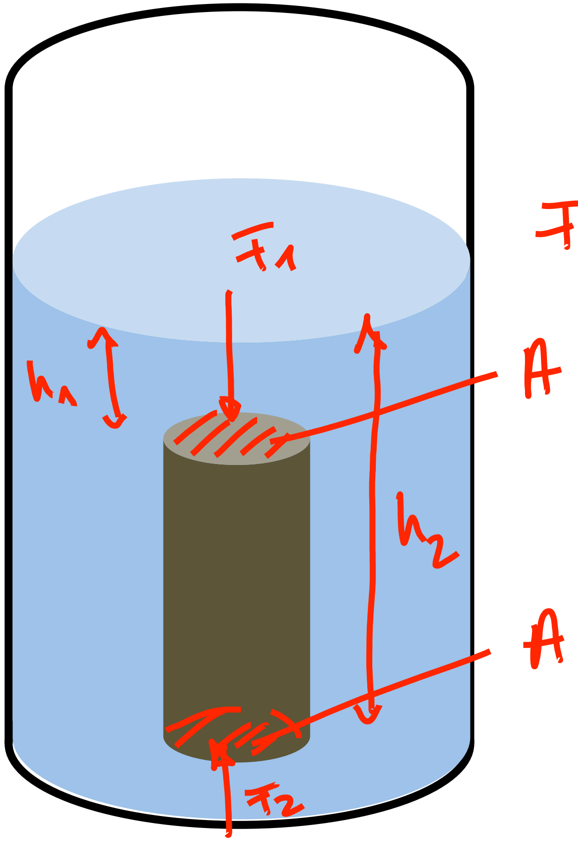
$\varnothing \approx 1\,\mathrm{m} \Rightarrow R = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$F = p\,A = 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \pi\,(0{,}5\,\mathrm{m})^2$

$\approx 80\,000\,\mathrm{N}$

$p_{Luft} \approx 1\,\mathrm{bar} \approx 10^5\,\mathrm{Pa}$

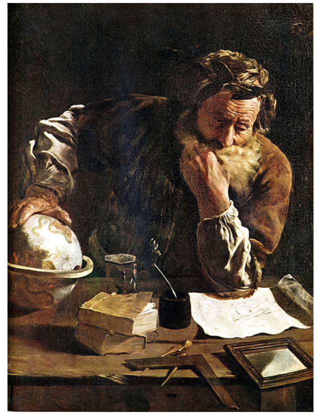
Auftrieb



$$F_1 = p_1 \cdot A = \rho \cdot g\, h_1 \cdot A$$

$$F_2 = p_2 A = \rho\, g\, h_2 \cdot A$$

$$F_{Auftrieb} = F_2 - F_1 = \rho\, g \cdot (h_2 - h_1) A = \underbrace{\rho}_{\rho_{Fluid}} \cdot \underbrace{g \cdot V_{Körper}}_{\text{Gewichtskraft des verdrängten Fluids}}$$

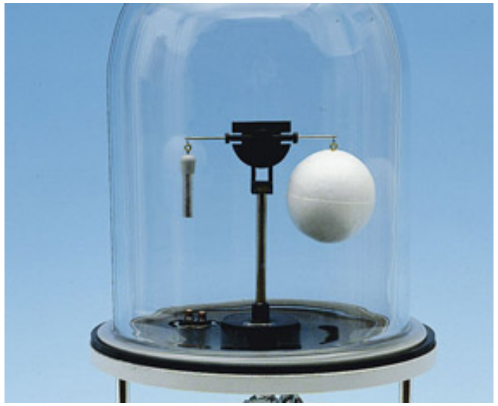


https://de.wikipedia.org/wiki/Zahl

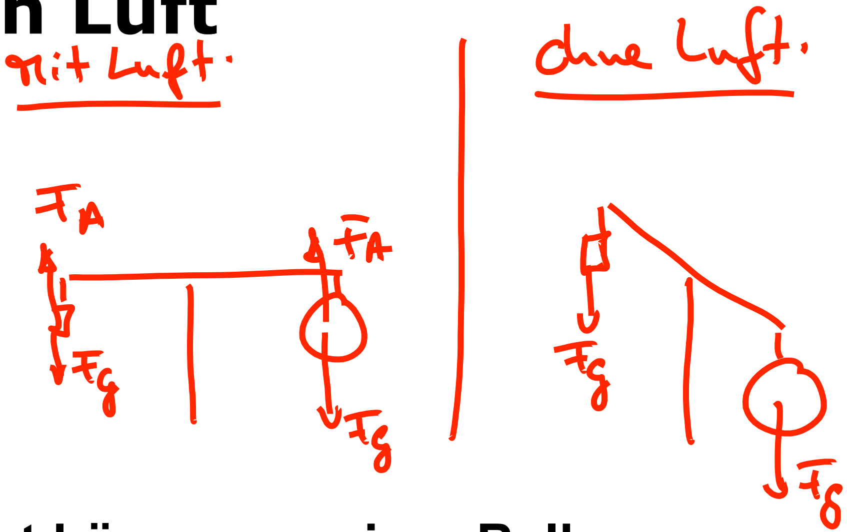
Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.)

Auftriebskraft = Gewichtskraft des verdrängten Fluids („Archimedisches Prinzip“)

Auftrieb in Luft



http://www.ld-didactic.de/phk/a.asp?a=37910&L=2



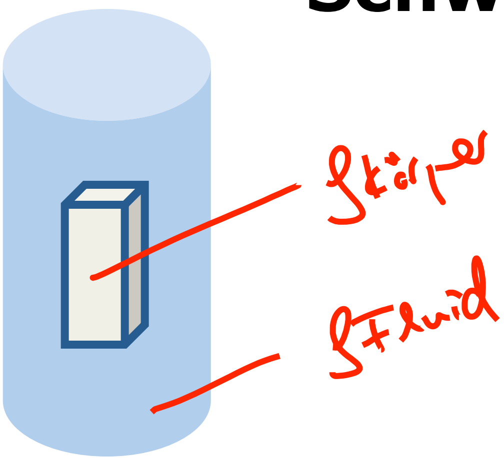
Ein Styroporball und ein Metallgewicht hängen an einer Balkenwaage (in Luft) und sind im Gleichgewicht. Jetzt wird die Luft aus dem Gefäß um die Waage gepumpt. Was passiert?

A) Der Styroporball sinkt nach unten. ✓

B) Das Metallgewicht sinkt nach unten.

C) Die Waage bleibt ausbalanciert.

Schwimmbedingung



http://wir-retten-unsere-erde.de.tl/Folgen-des-Klimawandels.htm

Bedingung	Verhalten
$\rho_{Körper} > \rho_{Fluid}$	sinkt
$\rho_{Körper} = \rho_{Fluid}$	schwebt
$\rho_{Körper} < \rho_{Fluid}$	schwimmt

Experiment: SF6 Schiff

Bewegte Flüssigkeiten: Strömungen

Isarhochwasser, August 2020

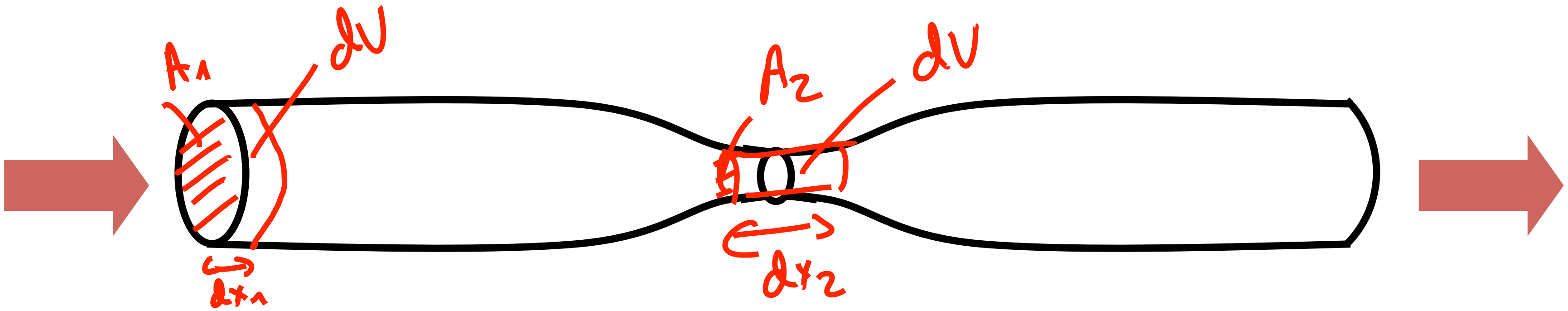
Eisbachwelle

https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Eisbach_die_Welle_Surfer.JPG

Zunächst: **Ideale Flüssigkeiten**

- keine Viskosität (reibungsfrei)
- nicht kompressibel (Volumen konstant)

Die Kontinuitätsgleichung



Volumenstrom

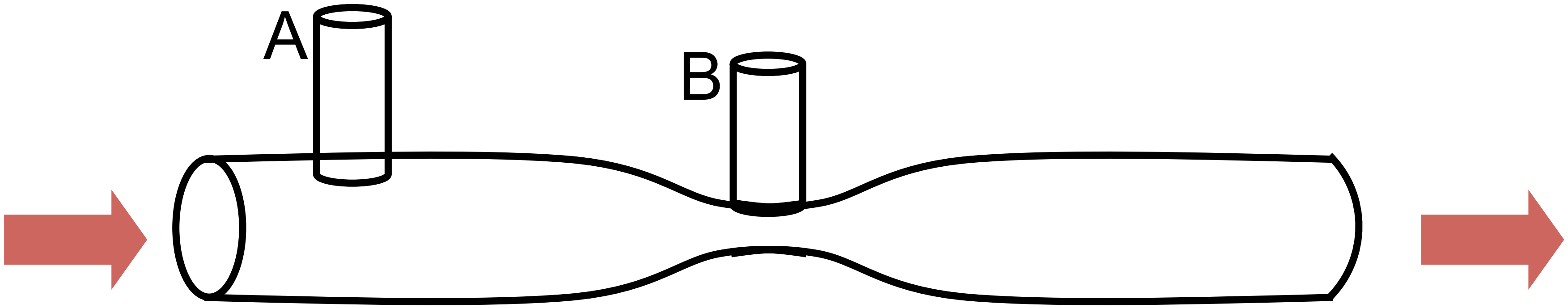
$$\frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dx}{dt} = A\, v = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Die Kontinuitätsgleichung gilt für alle inkompressiblen Strömungen

Die Experiment: Venturirohr



Wenn das Fluid durch das untere Rohr strömt, in welchem Steigrohr steht die Flüssigkeit dann höher?

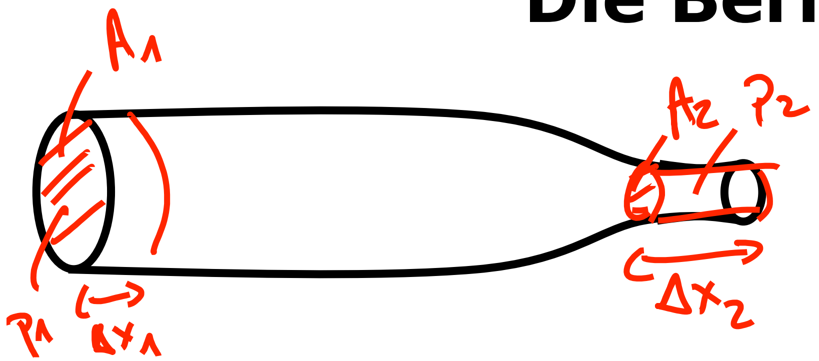
A) In Rohr A. ✓

B) In Rohr B.

C) Das Fluid steht in A und B gleich hoch.

Experiment: Venturirohr

Die Bernoulli-Gleichung



p_1 verrichtet Arbeit:

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \, \Delta x_1$$
$$= p_1 \cdot \Delta V_1 = p_1 \cdot \Delta V$$

Diese Arbeit teilt sich auf in:

① Drücke gegen p_2:

$$\Delta W_2 = p_2 \, A_2 \, \Delta x_2 = p_2 \cdot \Delta V$$

② Beschleunige das Fluid:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \overset{!}{=} \Delta W_1 - \Delta W_2 = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V$$

Energieerhaltung!

$$\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{const.}$$

Der statischer Druck ***p*** nimmt bei Zunahme der Fließgeschwindigkeit ab!

Terme in der Bernoulli-Gleichung

Für die Strömung eines inkompressiblen und reibungsfreien Fluides ("ideales Fluid") gilt:

$$p + g\rho h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

statischer Druck

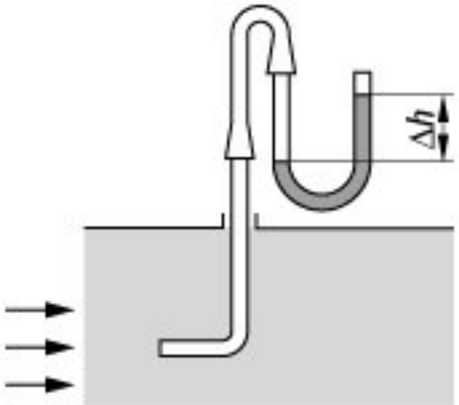
Schwere-druck

Staudruck

https://de.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli

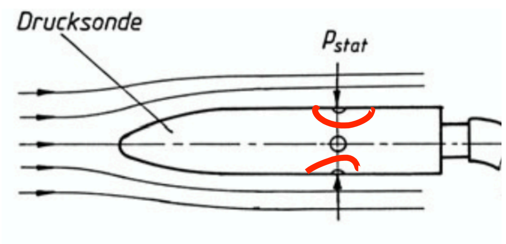
Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Pitot-Rohr misst den **Gesamtdruck**

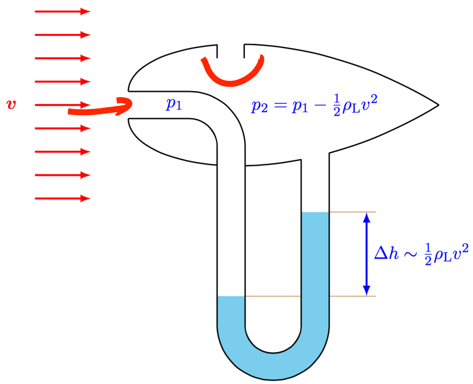


http://www.spektrum.de/lexika/images/physik/fff10498.jpg

Seitlich offene Sonde misst den **statischen Druck**



Prandtlrohr misst den **Staudruck**



http://expweb.phys.ethz.ch/03/02/03/bes.pdf

Pitot-Rohr und die Geschwindigkeit von Flugzeugen

$$p_{\text{Pitot}} = p_{\text{statisch}} + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,(p_{\text{Pitot}} - p_{\text{statisch}})}{\rho}}$$

$\hat{=}$ indicated air speed

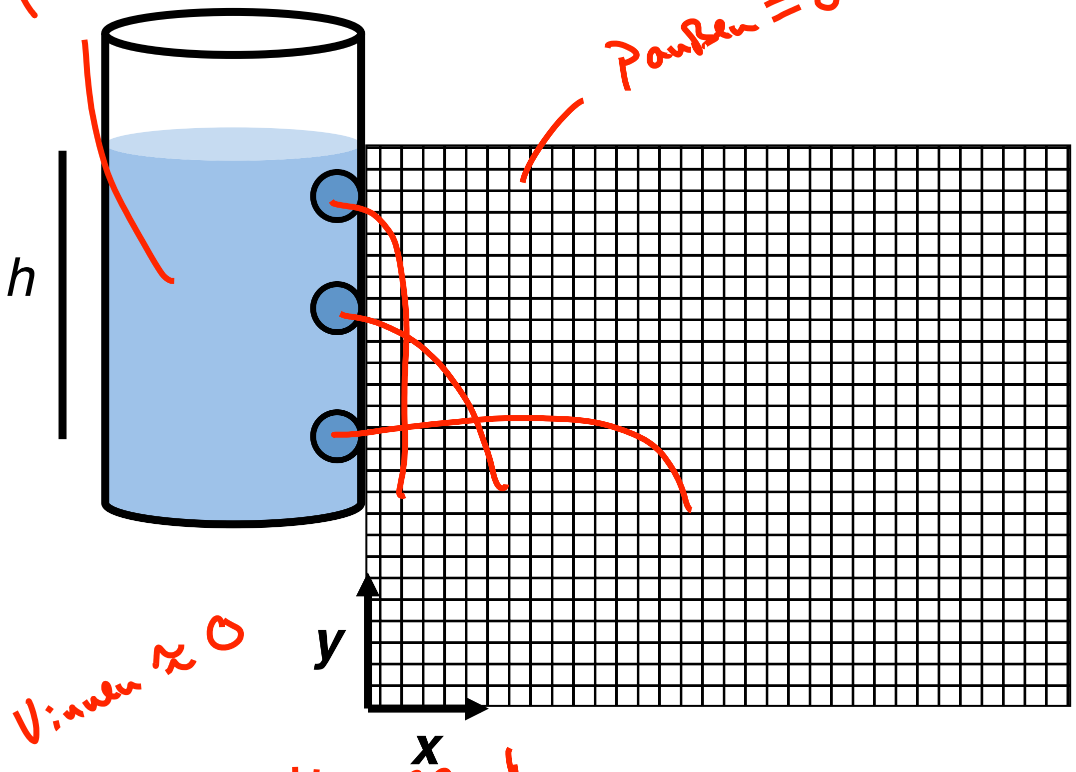
$\neq$ true air speed

$\neq$ ground speed

Hydrostatischer Druck & Ausströmen

$p_{innen} = \rho \cdot g \cdot h$

$p_{außen} = 0$



$v_{innen} \approx 0$

Experiment: Ausströmen

Bewegung in *x*-Richtung

$v_{außen} = \sqrt{2 \cdot g \, h}$

Bewegung in *y*-Richtung

Schwerkraft

→ Ähnlich wie schiefer Wurf

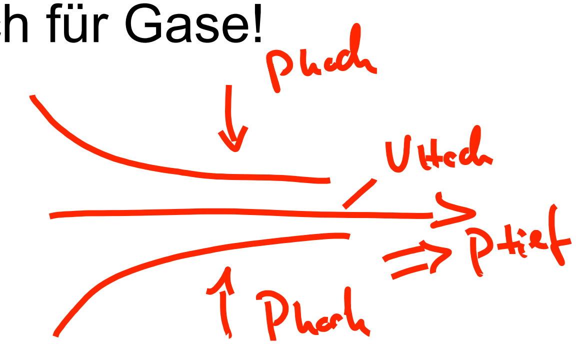
Bernoulli-Gleichung:

$$p_{innen} + \frac{1}{2}\rho v_{innen}^2 = p_{außen} + \frac{1}{2}\rho v_{außen}^2$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_{außen}^2$$

Bernoulligleichung und Gase

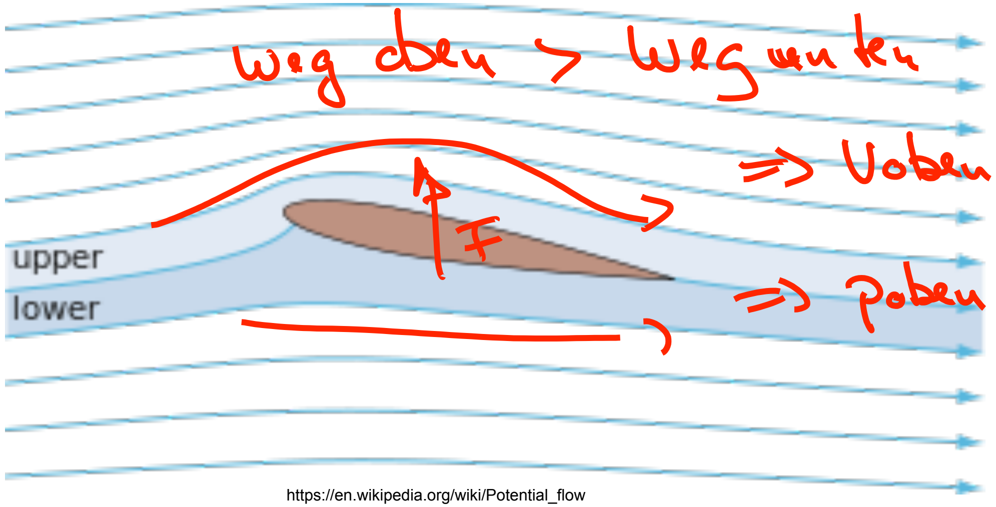
Die Bernoulli-Gleichung gilt **qualitativ** auch für Gase!



Experiment: Luftstrom zwischen zwei Papieren

Experiment: Hydrodynamisches Paradox

Anwendung: Dynamischer Auftrieb von Flugzeugen

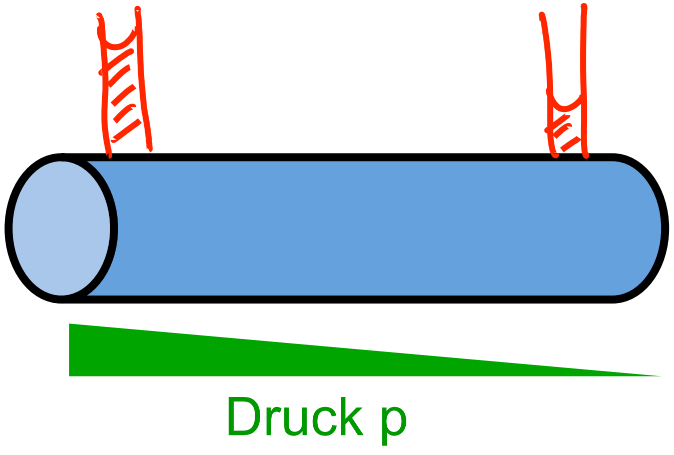


https://en.wikipedia.org/wiki/Potential_flow

Experimente: Ball mit Gebläse

Experimente: Hausdach im Sturm

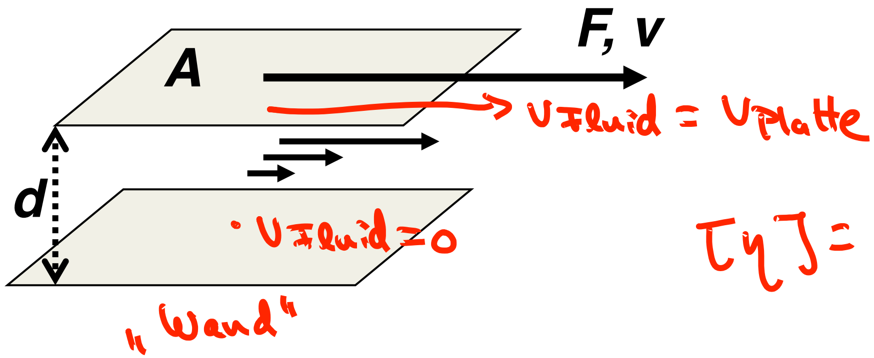
Viskosität



Druckabfall entlang des Rohres für viskoses Fluid!

Experiment: Druckabfall entlang eines Rohres

Definition der Viskosität η $\vec{F}_{Reibung} = -\eta \cdot A \frac{\vec{v}}{d}$



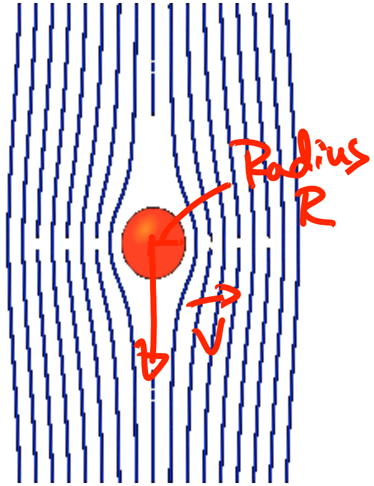
$$[\eta] = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s$$

Stokes-Reibung („Flüssigkeitsreibung“)

$$F_{Reibung} = -\eta \cdot A \cdot \frac{v}{d} = -\eta \, 4\pi R^2 \frac{v}{R}$$

$$= -4\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

Genaue Rechnung ergibt das bekannte Gesetz:



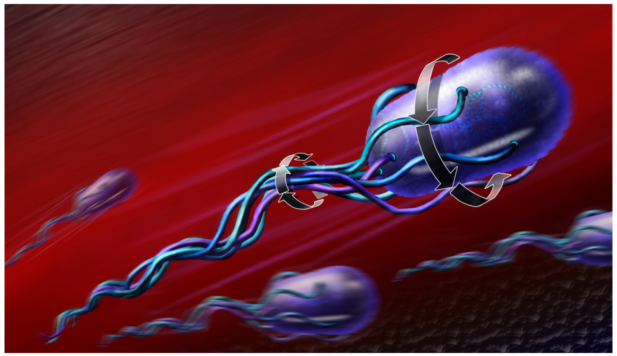
http://www.thefullwiki.org/Sediment_transport

$$|F_R| = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

η dynamische Viskosität
$[\eta]$ = Pa·s = N·s/m^2

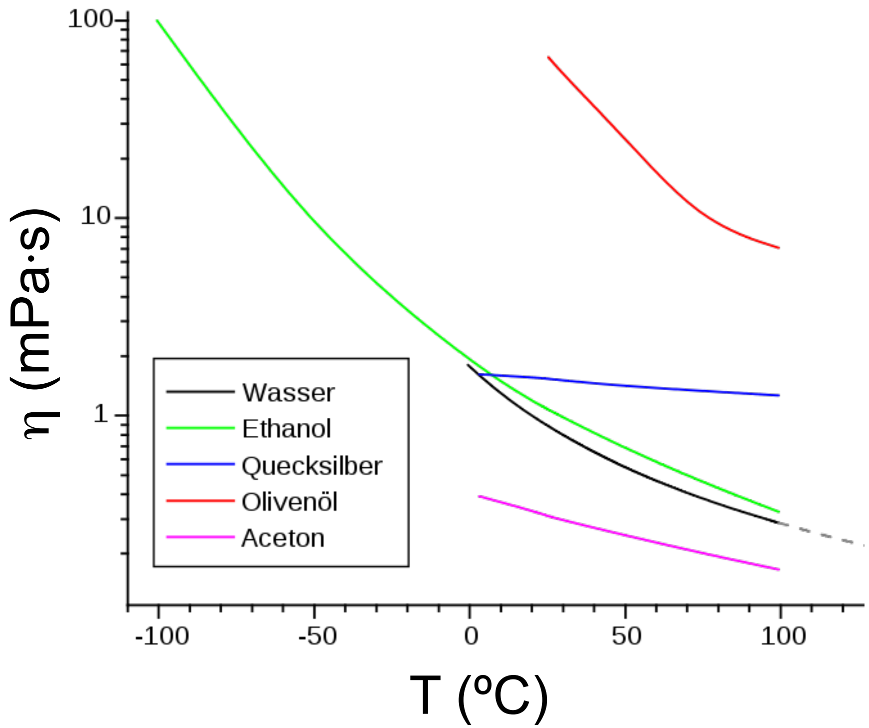

https://de.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes

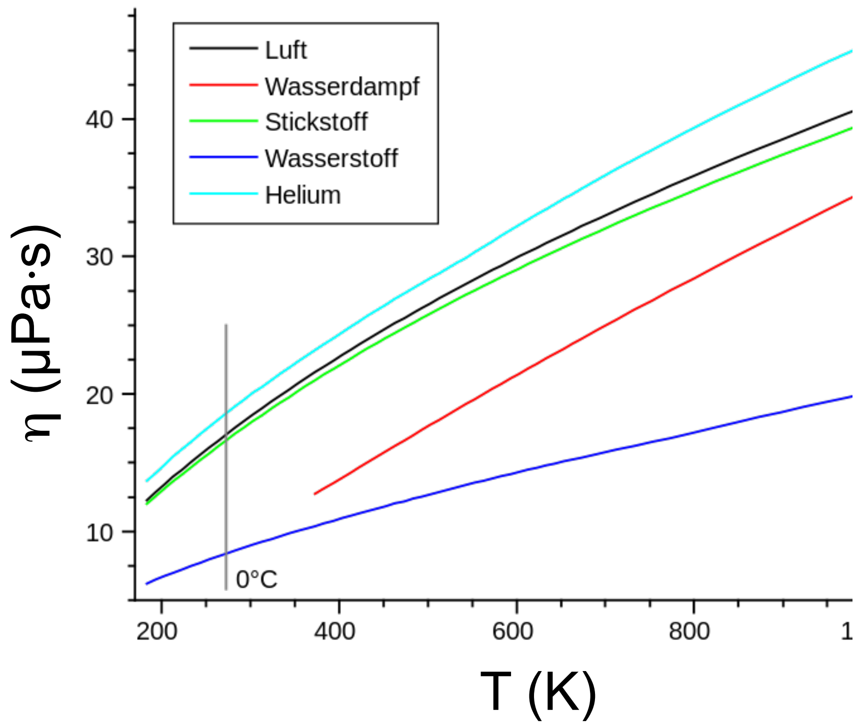
Sir George Gabriel Stokes (1819-1903)



Stokes Reibung ist wichtig in vielen biologischen Prozessen auf < µm Skala

Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen

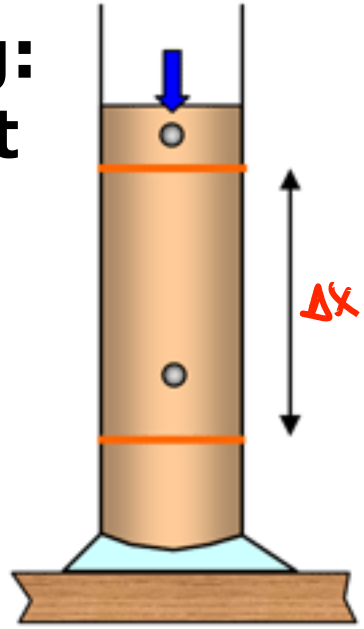




η von Flüssigkeiten nimmt mit zunehmender Temperatur ab!

η von Gasen nimmt mit zunehmender Temperatur zu!

Anwendung der Stokes-Reibung: Sedimentationsgeschwindigkeit



(resourcefulphysics.org)
http://tap.iop.org/mechanics/drag_forces/page_39518.html

Wir lassen Kugeln aus dem gleichen Material, aber unterschiedlicher Größe (Radius) in einem viskosen Fluid fallen / sinken.

In guter Näherung legen die Kugeln in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, d.h. v = const. und $a = 0$ (im Gegensatz zum freien Fall!)

Experiment: Kugel in viskosem Fluid

Δt

$\Delta x \approx 20$ cm

Durch-messer	Zeit
2 mm	22,43 s
3 mm	8,84 s
4 mm	5,24 s
5 mm	3,43 s

Größere Kugeln sinken schneller!

Anwendung der Stokes-Reibung: Sedimentationsgeschwindigkeit

Stokesreibung:

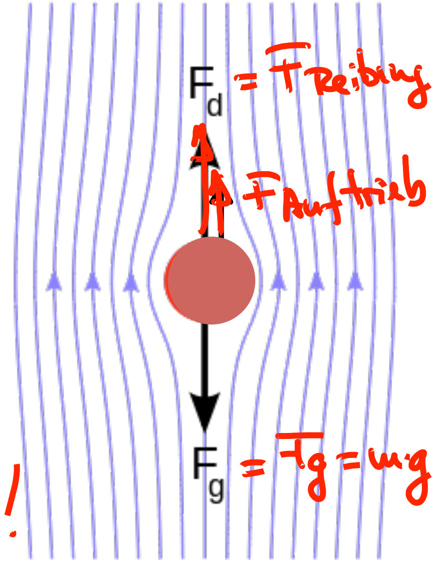
$$|F_R| = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

Schwerkraft:

$$|F_G| = \rho_K \cdot V \cdot g$$

Auftriebskraft:

$$|F_A| = \rho_{Fl} \cdot V \cdot g$$



https://de.wikipedia.org/wiki/Stokessche_Gleichung

$a = 0$; $v = \text{const.} \Rightarrow F_{ges} = 0$ Kräftegleichgewicht!

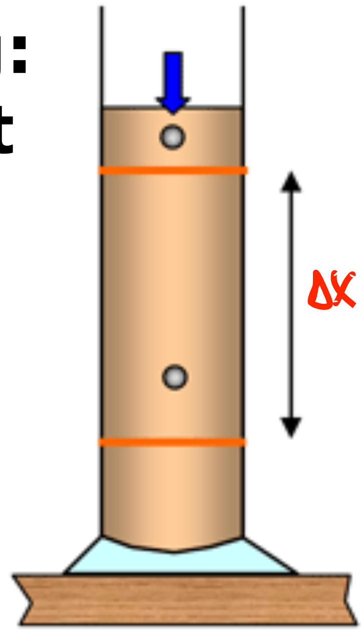
$$F_{Reibung} = F_g - F_{Auftrieb}$$

$$6\pi\eta R \cdot v = (\rho_{Körper} - \rho_{Fluid}) \cdot V \cdot g = (\rho_K - \rho_F) \cdot g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{9} \cdot g \, \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{\eta} \cdot R^2$$

Anwendung der Stokes-Reibung: Sedimentationsgeschwindigkeit

Wir lassen Kugeln aus dem gleichen Material, aber unterschiedlicher Größe (Radius) in einem viskosen Fluid fallen / sinken.

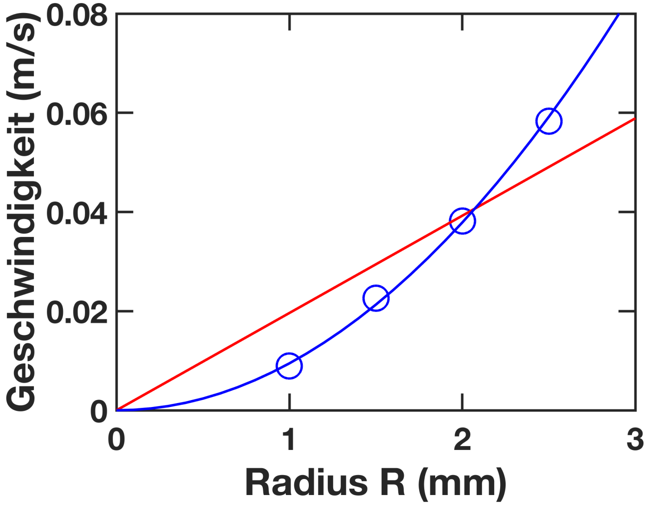


(resourcefulphysics.org)
http://tap.iop.org/mechanics/drag_forces/page_39518.html

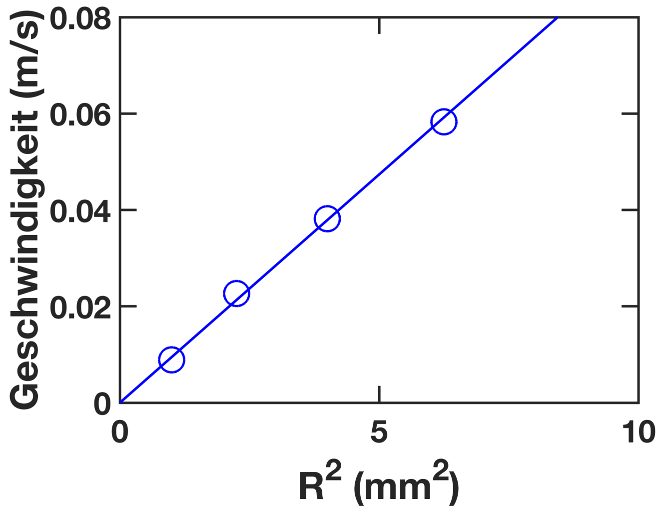
Δt

Durch-messer	Zeit
2 mm	22,43 s
3 mm	8,84 s
4 mm	5,24 s
5 mm	3,43 s

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$



$\sim R^2$

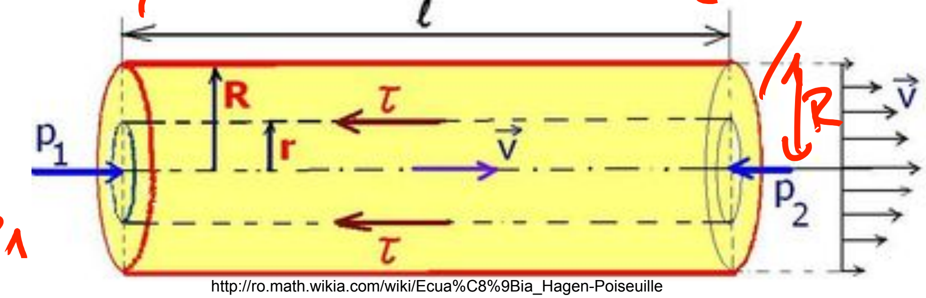


Strömung durch ein Rohr (Hagen-Poiseuille)

l

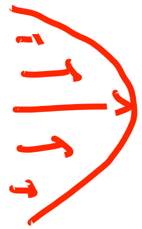
P_2

Parabelförmiges Strömungsprofil



P_1

http://ro.math.wikia.com/wiki/Ecua%C8%9Bia_Hagen-Poiseuille



$P_1 > P_2$

https://de.wikipedia.org/wiki/Gotthilf_Hagen

Gotthilf Hagen
(1797-1884)

https://de.wikipedia.org/wiki/Jean_Léonard_Marie_Poiseuille

Jean Poiseuille
(1797-1869)

Experiment: Parabelförmiges Strömungsprofil

Hier nur das Ergebnis für die Flussrate:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi (P_1 - P_2)}{8 \eta \cdot l} R^4$$

Erinnerung: laminare und turbulente Strömungen

Reibung: Stokes-Reibung für *Re* < 1

$$F_R \propto v$$

Newton-Reibung für *Re* >> 1

$$F_R \propto v^2$$

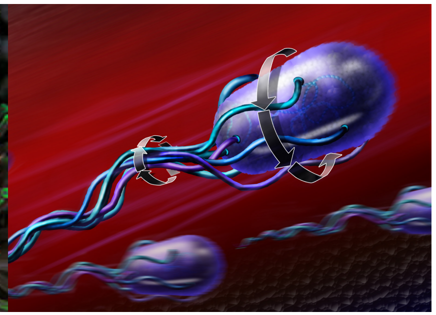
Reynoldszahl: $$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

- Dichte des strömenden Fluids ρ [kg/m^3]
- Strömungsgeschwindigkeit v [m/s]
- Charakteristische Länge des Objektes d [m]
- Dynamische Viskosität η [Pa·s] = [N·s/m^2]
- Kinematische Viskosität ν [m^2/s]

d ~ 1 m	d ~ 1 cm	d ~ 1 µm
v ~ 1 m/s	v ~ 1 cm/s	v ~ 10 µm/s
Re **~ 10^6**	Re **~ 10^2**	Re **~ 10^{-5}**

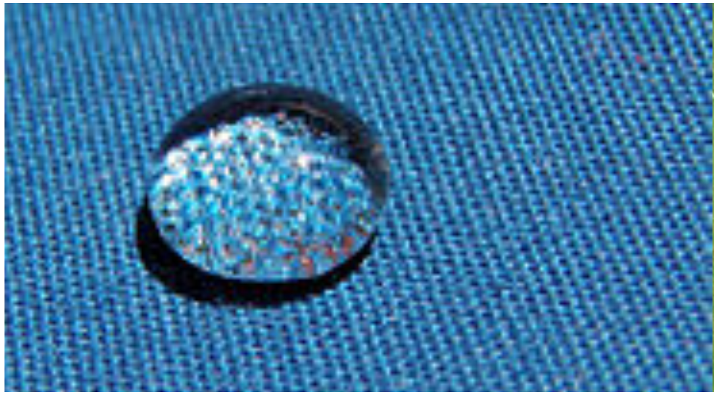
https://de.wikipedia.org/wiki/Rettungsschwimmen

https://de.wikipedia.org/wiki/Anemonenfische



Nicolle Rager Fuller, National Science Foundation

Oberflächenspannung



https://de.wikipedia.org/wiki/Kohäsion_(Chemie)

https://en.wikipedia.org/wiki/Lotus_effect

https://de.wikipedia.org/wiki/Oberflächenspannung

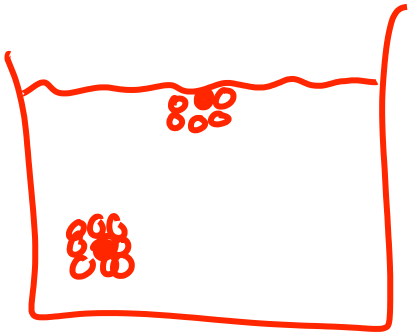
Auf kleinen Längenskalen herrschen (kurzreichweitige) Anziehungskräfte zwischen den Fluidmolekülen

$E_{\text{Oberfläche}} = \sigma \cdot A$

Oberfläche

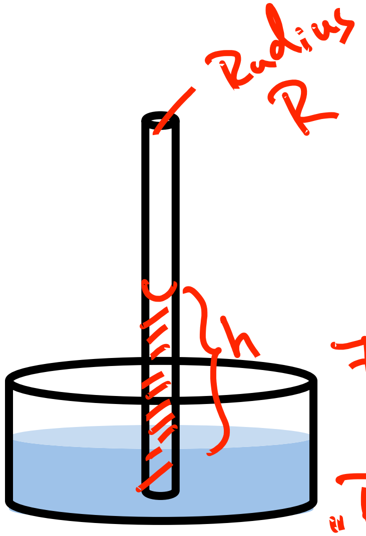
spezifische Oberflächenenergie

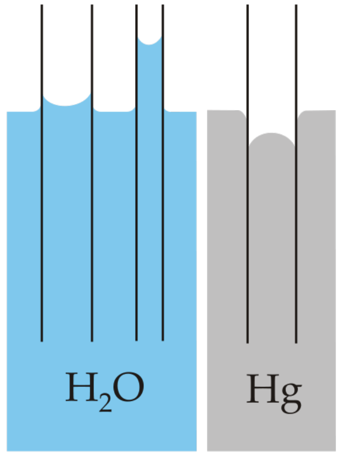
$\hat{=}$ "Oberflächenspannung"



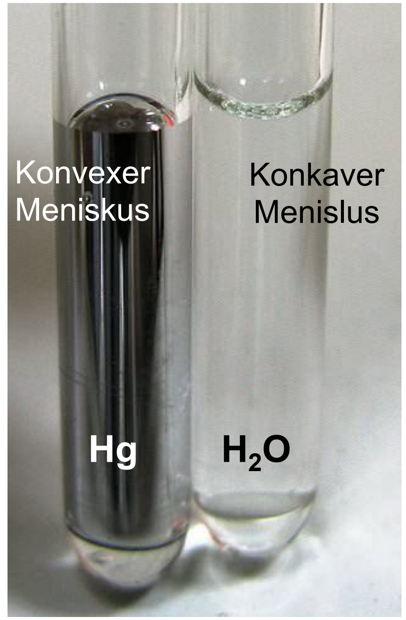
$[\sigma] = \frac{J}{m^2} = \frac{N}{m}$

Kapillarkraft





https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary_action



http://www.diffen.com/difference/Adhesion_vs_Cohesion

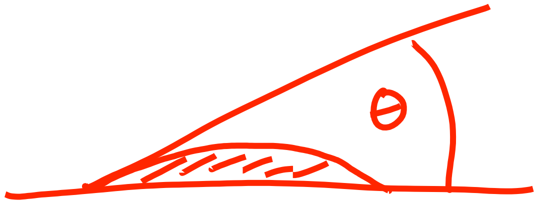
Adhäsionkraft mit Wand $\overset{!}{=}$ Gewichtskraft

$$F_g = m\cdot g = \rho\cdot V\cdot g = \rho\cdot g\cdot \pi R^2\cdot h$$

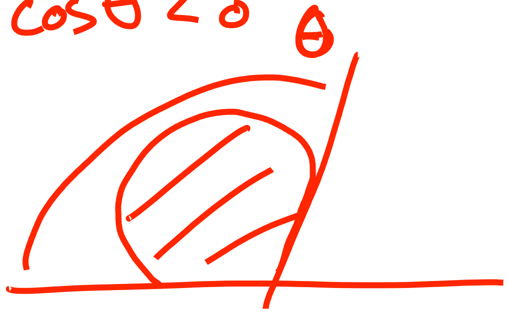
„Randkraft": $F_{Rand} = 2\pi R\cdot \sigma\cdot \cos\theta$

$$F_g = F_{Rand} \Rightarrow h = \frac{2\sigma\cos\theta}{R\cdot g\cdot \rho}$$

starke attraktive Wechselwirkungen: $\cos\theta > 0$



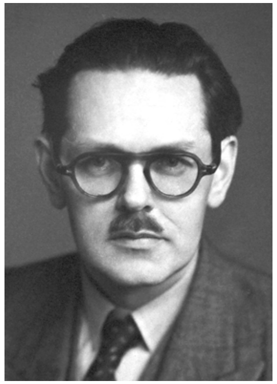
schwache, repulsive Wechselwirkungen: $\cos\theta < 0$



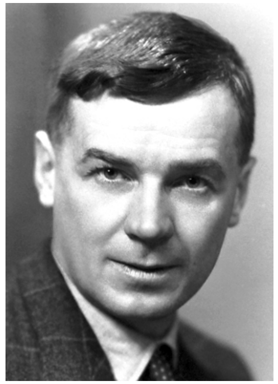
Anwendungen der Kapillarkraft

https://de.wikipedia.org/wiki/Füllfederhalter

https://de.wikipedia.org/wiki/Baum

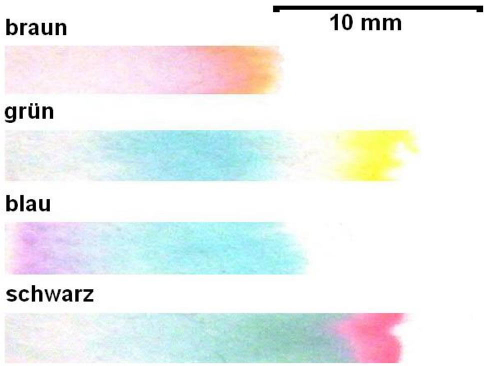

https://de.wikipedia.org/wiki/Archer_J._P._Martin

Archer Martin (1910-2002)


https://de.wikipedia.org/wiki/Richard_L._M._Synge

Richard Synge (1914-1994)

Chemienobelpreis 1952 für Chromatographie



https://de.wikipedia.org/wiki/Papierchromatographie

Experiment: Papierchromatographie

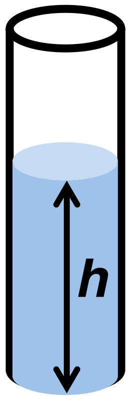
Zusammenfassung: Druck & Auftrieb

- **Druck:**

$$p = \frac{F}{A}$$

Einheit:
$[p]$ = N/m^2 = kg/(m·s^2) = Pa

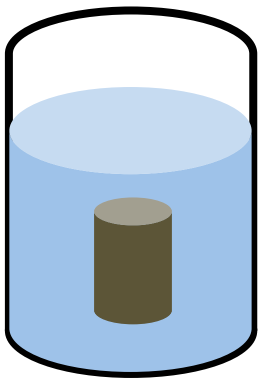
- **Schweredruck:**



$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

Hydrostatisches Paradoxon:
Druck ist nur von der Höhe der Flüssigkeitssäule, nicht aber von der Form des Gefäßes oder Flüssigkeitsmenge abhängig.

- **Auftrieb:**



$$F_{\text{Auftrieb}} = g \cdot \rho_{Fluid} \cdot V$$

Archimedisches Prinzip:
Auftriebskraft = Gewichtskraft des verdrängten Fluids

Zusammenfassung: Bernoulli-Gleichung

Für die Strömung eines inkompressiblen und reibungsfreien Fluides ("ideales Fluid") gilt:

$$p + g\rho h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

statischer Druck

Schwere-druck

Staudruck

https://de.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli

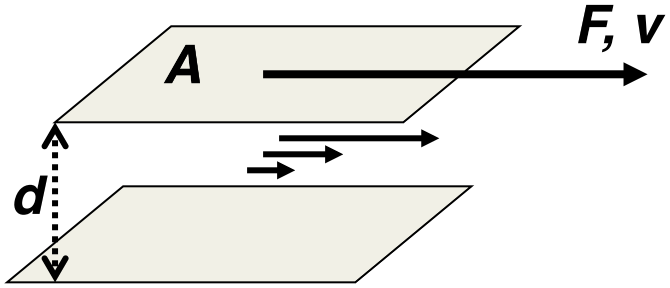
Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Zusammenfassung: Viskose Reibung

Reale Fluide haben Viskosität, d.h. es kommt zu Energieverlusten und Reibung, wenn das Fluid strömt

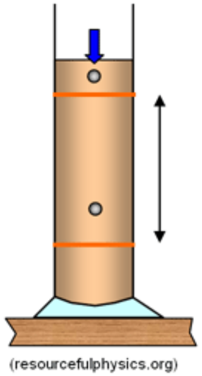
Wichtige Fälle (gelten für hohe Viskosität, kleine Geschwindigkeiten):

- Fluid zwischen zwei Platten:



$$F_{\text{Reibung}} = -\eta \cdot A \cdot \frac{v}{d}$$

- Kugel in einem viskosen Fluid (**Stokes**):



http://tap.iop.org/mechanics/drag_forces/page_39518.html

$$F_{\mathrm{R}} = -6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$