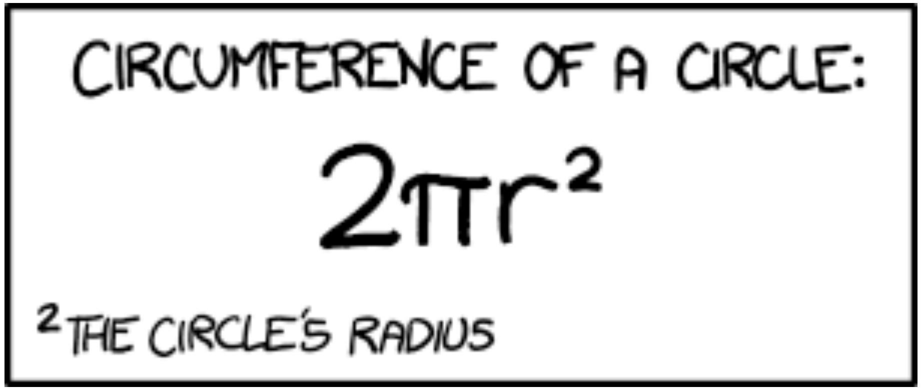
Drehbewegungen

Physik 1 für Chemiker und Biologen
7. Vorlesung



https://xkcd.com/1184/

Heute: Drehbewegungen
- Trägheitsmoment
- Drehimpuls
- Drehmoment

Prof. Dr. Ralf Jungmann
Jungmann@physik.lmu.de
Prof. Dr. Jan Lipfert
Jan.Lipfert@lmu.de

Drehbewegungen

Bisher: „**Massepunkt**" = idealisierter Körper, bei dem alle Masse als im Schwerpunkt konzentriert genähert wird.

Jetzt: „**starrer Körper**" = Körper mit Ausdehnung (diskrete Massepunkte oder kontinuierlich), der als **nicht verformbar** genähert wird.

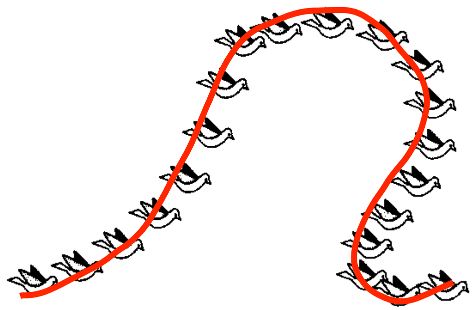
https://de.wikipedia.org/wiki/Kim_Yuna

https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%BCrostuhl

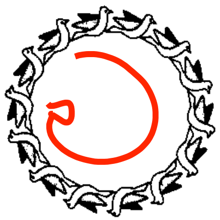
Experiment:
Rotation auf Drehstuhl

Drehbewegungen

Die Bewegung eines **starren Körpers** lässt sich aus **Translation** und **Rotation** zusammensetzten.

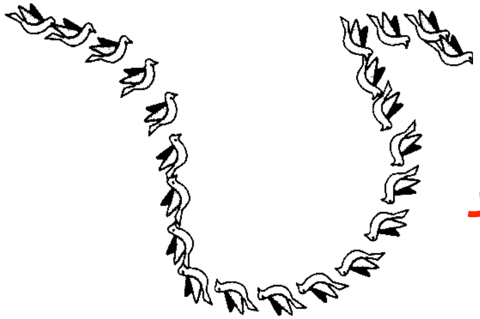


Translation
(x, y, z)

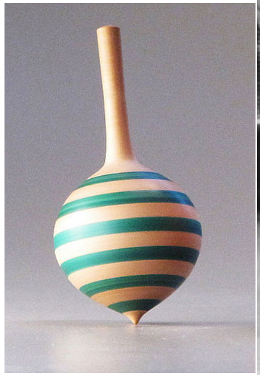


(Auf der Stelle)

Rotation



Allgemein:
Translation
+ Rotation



https://de.wikipedia.org/wiki/Kreisel

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pauli_wolfgang_c4.jpg

Lineare vs. Drehbewegungen

Zu jeder Größe der linearen Bewegung gibt es eine korrespondierende Größe der Drehbewegung. Die Gleichungen für beide Bewegungsformen sind formal gleich!

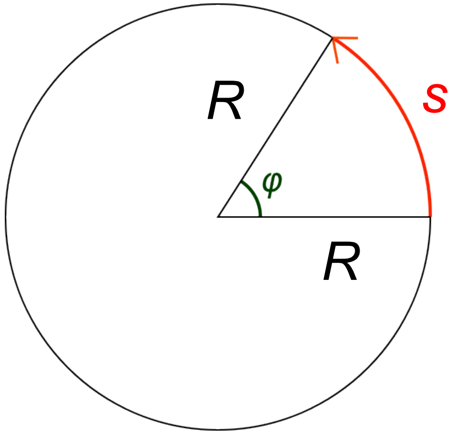
http://sportsnscience.utah.edu/2012/09/04/skiing-friction-basic/

http://de.wulffplag.wikia.com/wiki/Datei:Kettenkarussell.jpg

x, $\vec{r}$	Weg, Verschiebung	Drehwinkel
v, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
a, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
m	Masse	Trägheitsmoment
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Impuls	Drehimpuls
$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$	Kraft	Drehmoment
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	Kinetische Energie	Rotationsenergie

Bemerkungen zu Winkeln

- Die „natürliche“ Einheit für Winkel ist das Bogenmaß, in *rad*

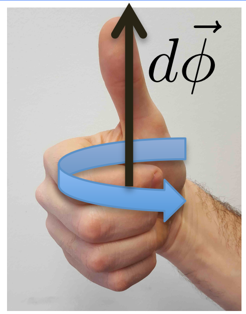


$$\varphi = \frac{s}{R}$$

UMRECHNUNG:
2π rad = 1 Umdrehung = 360°

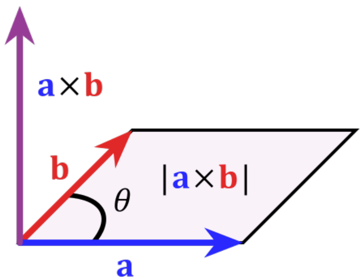
Drehung als Vektor:

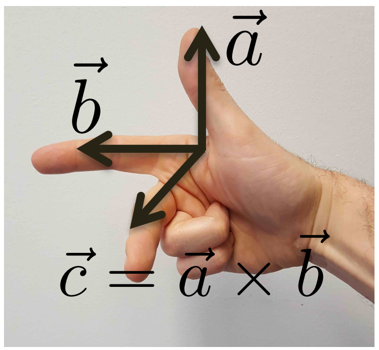
$$d\vec{\phi}$$



- Zur Erinnerung: „Kreuzprodukt“ von Vektoren: $\vec{a} \times \vec{b}$

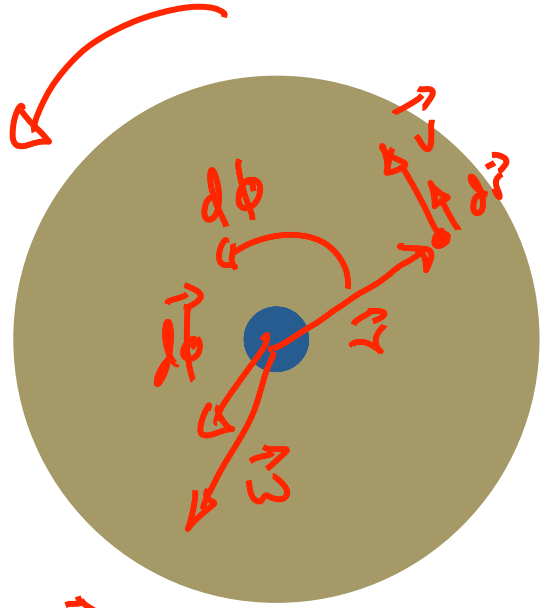
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$





„Rechte Hand Regel“

Bewegungsgleichungen für Rotation



- Infinitesimale Drehung

Rechte-Hand-Regel $\quad d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$

- Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

↪ Winkelgeschwindigkeit

- Winkelbeschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2} \times \vec{r} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

↪ Winkelbeschleunigung

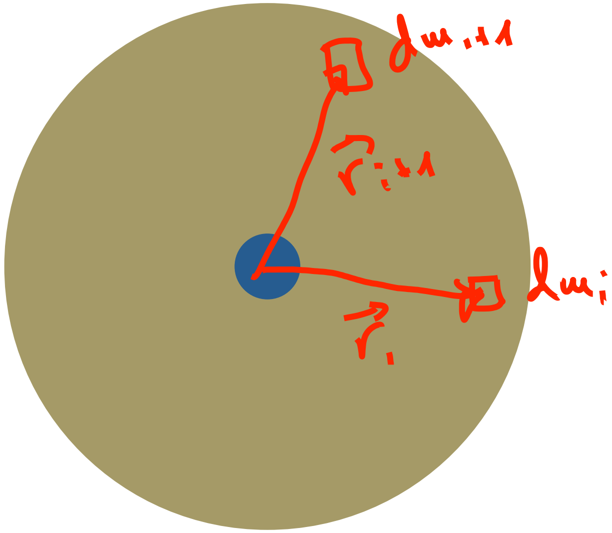
$d\vec{\phi}$, $\vec{\omega}$ zeigen aus der Zeichenebene

Gleichmässige Winkelbeschleunigung:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Achtung: $\vec{\alpha} \neq \vec{a}_{zentripetal}$

Kinetische Energie eines rotierenden Körpers



$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \sum_i dm_i \, v_i^2$$

$$\boxed{\text{Nutze: } \quad v = \omega \cdot r}$$

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i dm_i \, r_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 \, dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int \rho \, r^2 \, dV$$

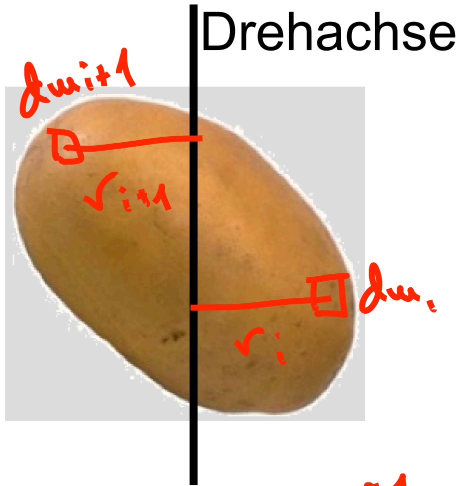
↳ Dichte

Trägheitsmoment ***I***

$$I = \sum_i dm_i \, r_i^2 = \int \rho \, r^2 \, dV$$

$$\Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Trägheitsmomente ausgedehnter Körper



$$I = \int r^2 \, dm = \int \rho r^2 \, dV$$

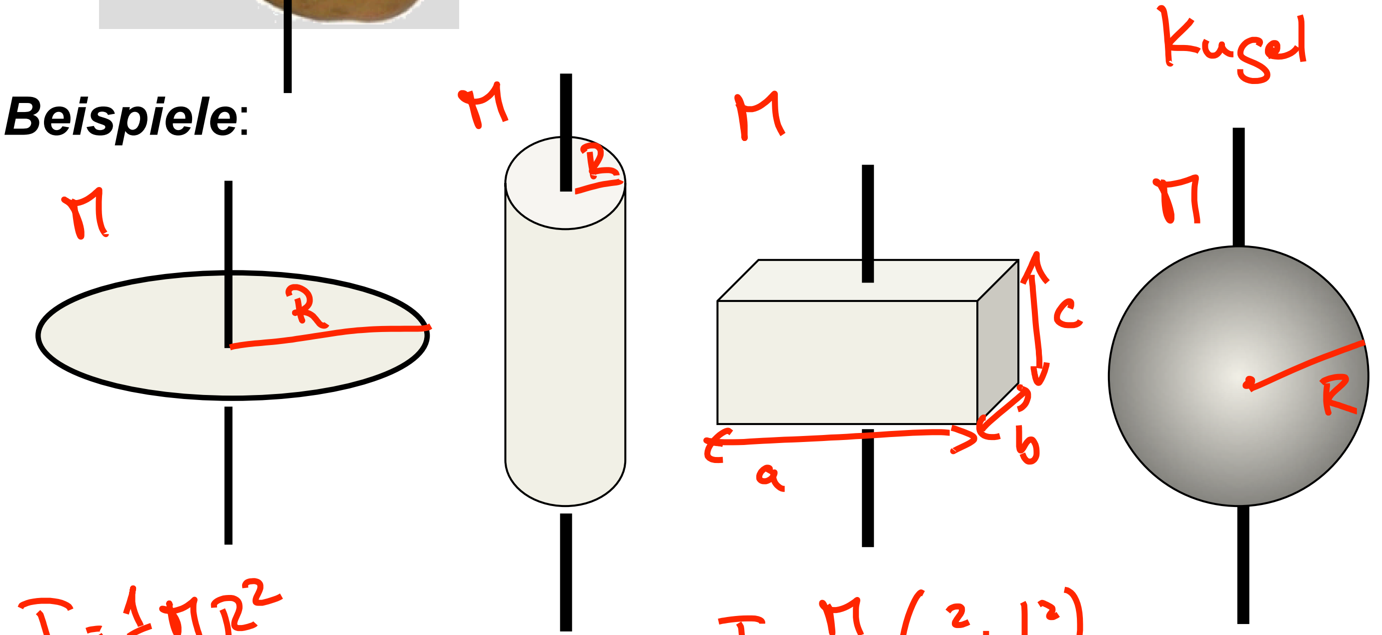
Das Trägheitsmoment ***I*** hängt ab von:

- Masse des Körpers
- Form
- Lage der Achse

I ist die „Masse" der Drehbewegung

I ist oft ein **Tensor**

Beispiele:



$I = \frac{1}{2} M R^2$

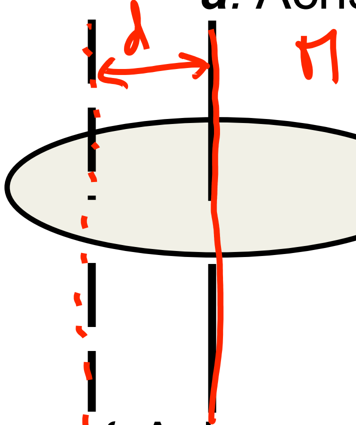
$I = \frac{1}{2} M R^2$

$I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$

$I = \frac{2}{5} M R^2$

Steinerscher Satz
(Theorem paralleler Achsen)

a: Achse durch den Schwerpunkt



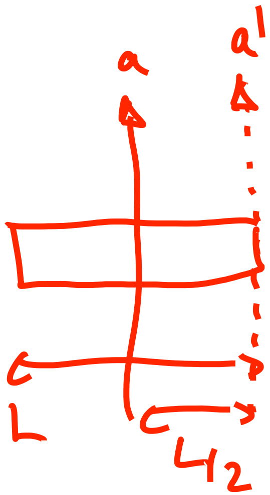
$$I_{a'} = I_a + M \cdot d^2 > I_a$$

a‘: Achse parallel zu ***a***, *nicht* durch den Schwerpunkt

$$I_{a'} = \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) M L^2$$

$$= \frac{1}{3} M L^2$$

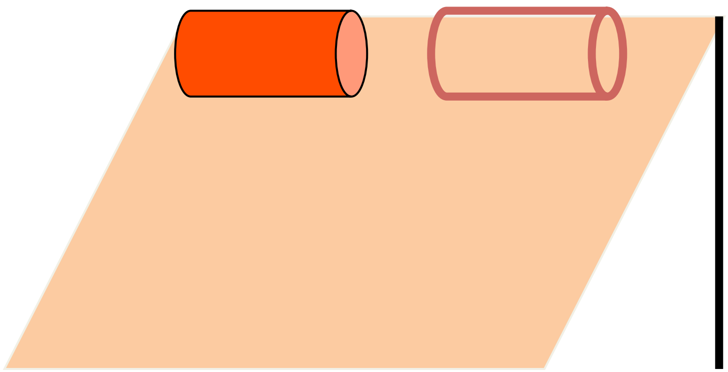


https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner

Jakob Steiner
(1796-1863)

Wettrennen auf der schiefen Ebene

Experiment: Voll-, Hohlzylinder auf schiefer Ebene



Voll- und Hohlzylinder mit gleicher Masse *m* und gleichem Radius *R* rollen schiefe Ebene hinunter.

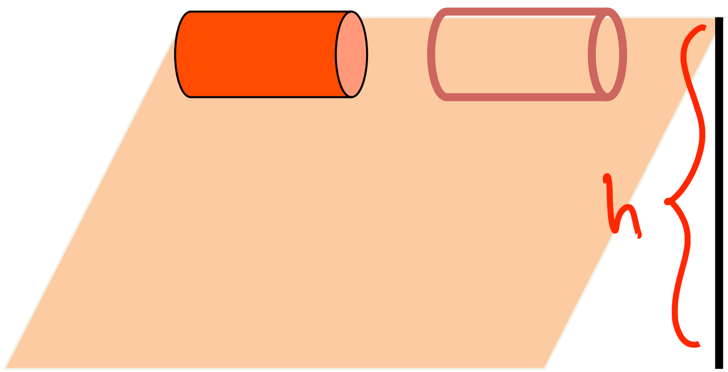
Welcher Zylinder ist schneller unten?

A) Der Vollzylinder. ✓

B) Der Hohlzylinder.

C) Beide kommen gleichzeitig unten an.

Lösungsansatz: In der Drehung steckt Energie!



Voll- und Hohlzylinder mit gleicher Masse *m* und gleichem Radius *R* rollen schiefe Ebene hinunter.

$I_{voll} = \frac{1}{2} m R^2$

$I_{hohl} = m \cdot R^2$

Rollbedingung:

$$\boxed{v = R \cdot \omega}$$

Annahme: Keine Reibung (d.h. Energieerhaltung)

Oben: $E_{kin} = 0$; $E_{rot} = 0$

$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

Unten: $E_{pot} = 0 \Rightarrow E_{kin} > 0$; $E_{rot} > 0$

Hohl: $\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (m R^2) \frac{v^2}{R^2} = \cancel{m} v^2$

$\Rightarrow v_{hohl} = \sqrt{g \cdot h}$

Voll: $m\, g \cdot h = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \cdot R^2\right) \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} \cancel{m} v^2$

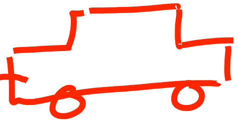
$\Rightarrow v_{voll} = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot h} > \sqrt{g \cdot h} = v_{hohl}$

Schwungräder als Energiespeicher

https://de.wikipedia.org/wiki/Gotthardpass

$m = 1000\,kg$

$\Delta h = 1000\,m$



Benötigte Energie

$\Delta E_{pot} = m \cdot g\, \Delta h$

$= 10^3 kg \cdot 10^3 m \cdot 10\, m/s^2$

$\approx 10^7\, J$

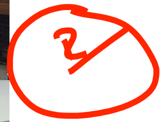
„Anlauf nehmen": $v_{unten} = 100\, \frac{km}{h} \approx 30\, m/s$

$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\, 1000\,kg \cdot (30\, m/s)^2 \approx 4{,}5 \cdot 10^5\, J$

Gyrobus

https://de.wikipedia.org/wiki/Gyrobus

Schwungscheibe als Energiespeicher:



$R = 0{,}5\,m$

$M = 300\,kg$

$I = \frac{1}{2} M R^2 = 40\,kg\,m^2$

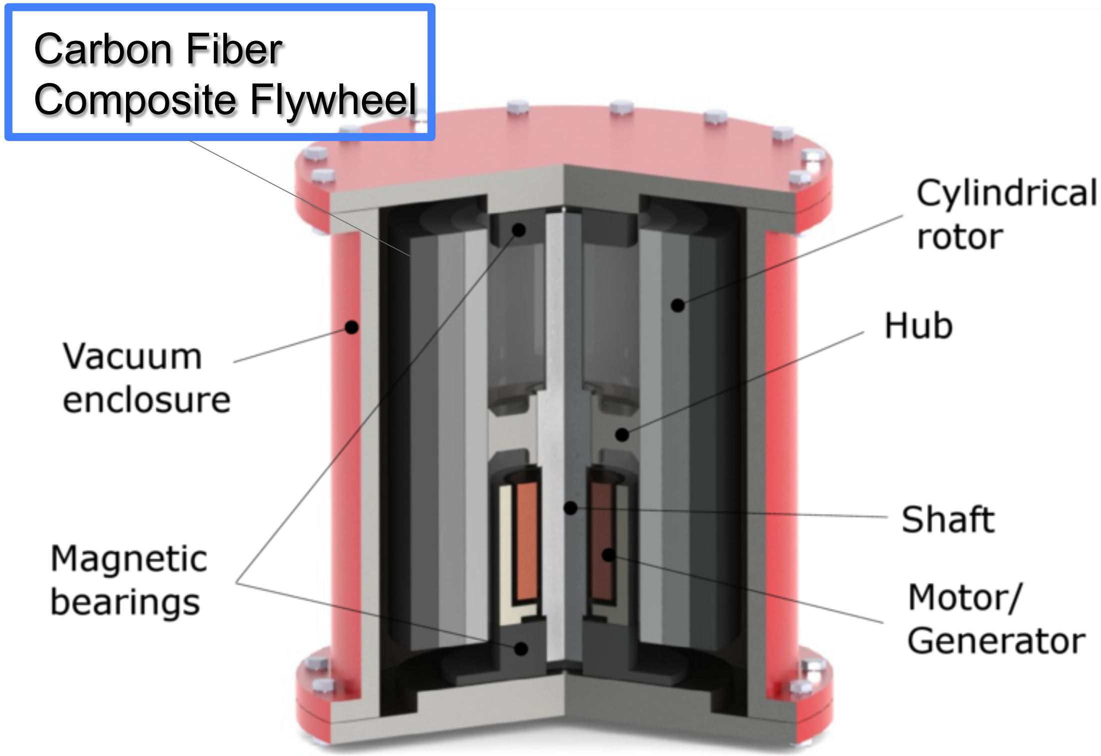
$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \overset{!}{=} 10^7\, J$

$\Rightarrow 7000\, rpm$

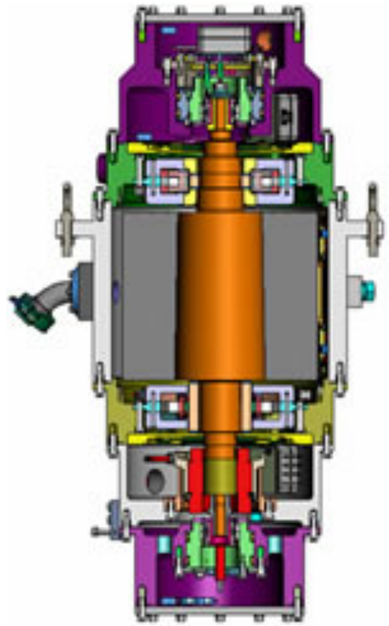
$\approx 730\, \frac{rad}{s}$

Schwungräder als Energiespeicher

- Drehung mit bis zu 80 000 rpm
- E_{rot} ~ 350 kWh ~ 10^9 J
- Vakuum um Verluste durch Luftreibung zu minimieren
- Anwendung: schnelle Notstromversorgung



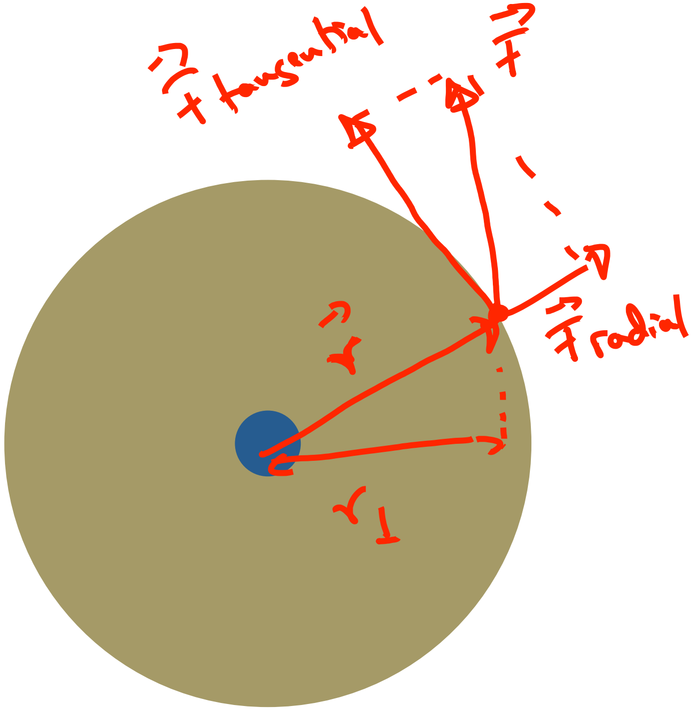
https://de.wikipedia.org/wiki/Schwungrad



https://de.wikipedia.org/wiki/Schwungrad

Das Drehmoment

Drehmomente verursachen eine Änderung der Drehbewegung



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= |\vec{r}|\,|\vec{F}| \sin\theta$$

θ ist $\measuredangle$ zwischen $\vec{r}, \vec{F}$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{F}| \cdot r_\perp$$
$$= |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_{tangential}|$$

Gleichgewichtsbedingung des starren Körpers

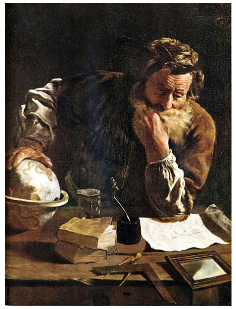
- Translation:

Betrachte Gesamtkraft.

$\vec{F}_{ges} = 0 \Rightarrow$ bleibt in Ruhe, keine Translation

$\vec{F}_{ges} \neq 0 \Rightarrow$ Bewegung, Translation

Erinnerung: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$



https://de.wikipedia.org/wiki/Zahl

Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.)

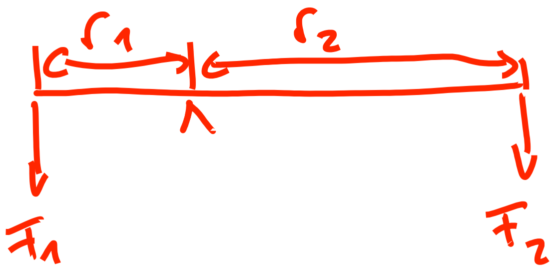
- Rotation:

Betrachte Gesamt-drehmoment

$\vec{T}_{ges} = 0 \Rightarrow$ Ruhe, d.h. keine Rotation

$\vec{T}_{ges} \neq 0 \Rightarrow$ Bewegung, d.h. Rotation

Hebelgesetz:

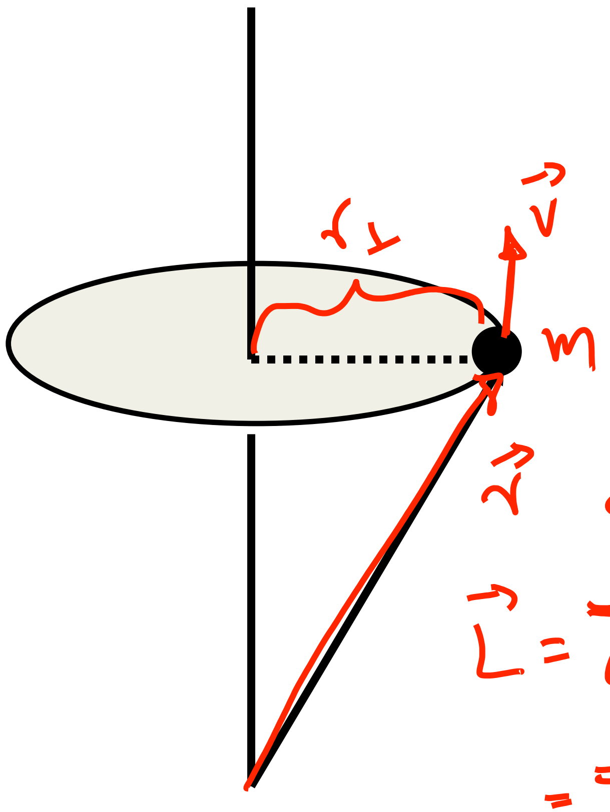


Für Gleichgewicht.

$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$

Experiment: Drehmomentscheibe

Drehimpuls



Definition Drehimplus
(für Massepunkt):

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$= \vec{r} \times \vec{p}$$

$$|\vec{L}| = m \cdot r_\perp |\vec{v}|$$

$$= m\, r_\perp^2\, \omega$$

System von Massepunkten.

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$= \sum_i m_i\, \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)$$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = \sum_i m_i\, r_{i,\perp}^2\, \omega = I \cdot \omega$$

Änderung des Drehimpuls $\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r_i} \times \vec{v_i})$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i m_i \underbrace{(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{v}_i)}_{=0} + \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i)$$

$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$, $\dot{\vec{v}}_i = \vec{a}_i$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{a}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \sum_i \vec{T}_i = \vec{T}_{ges}$$

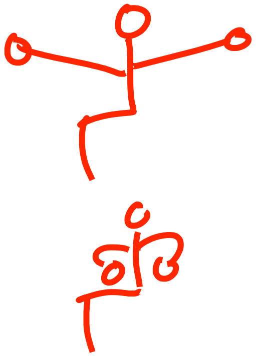
- Wenn keine äußeren Drehmomente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant!
- Wenn äußere Drehmomente wirken, ändern sie den Gesamtdrehimpuls gemäß:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{T}_{Gesamt}$$

Anwendungen der Drehimpulserhaltung

- Betrag des Drehimpulses:

$$|\vec{L}| = mr^2\omega = I\omega$$



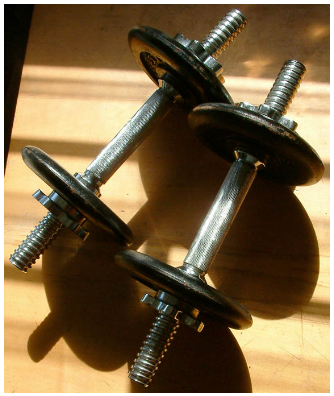
$I \nearrow \Rightarrow \omega \searrow$

$I \searrow \Rightarrow \omega \nearrow$

- Der Drehimpuls in einem abgeschlossen System ist konstant!

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i(t) = \text{const.}$$

https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%BCrostuhl

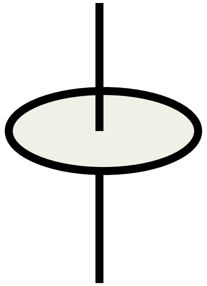


https://en.wikipedia.org/wiki/Dumbbell#/media/File:TwoDumbbells.JPG

Experiment: Drehstuhl mit Hanteln

Kreisel auf Drehstuhl

https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%BCrostuhl



Ein furchtloser Freiwilliger setzt sich auf einen (ruhenden) Drehstuhl. Er hält einen Kreisel, der sich im Uhrzeigersinn um eine vertikale Drehachse dreht. Jetzt dreht er den Kreisel um 90º, so dass er sich um eine horizontale Achse dreht.

Experiment: Drehstuhl mit Felge

Was passiert mit dem Freiwilligen auf dem Drehstuhl?

A) Er bleibt in Ruhe.

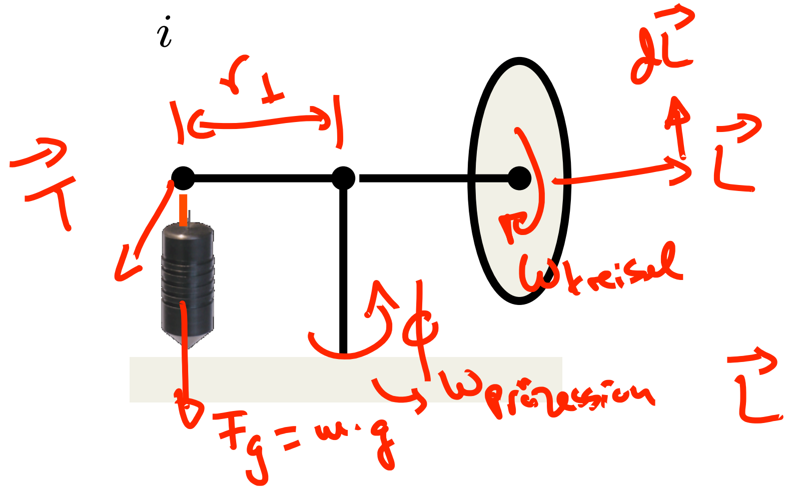
B) Er beginnt sich
im Uhrzeigersinn zu drehen. ✓

C) Er beginnt sich
gegen den Uhrzeigersinn zu drehen.

Anwendungen des Drehimpulssatzes: Präzession des Kreisels

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{T}_{Gesamt}$$

Die Richtung der Drehimpulsänderung steht senkrecht zur Kraft bzw. zum Drehmoment!



$\vec{T} = \dot{\vec{L}}$ $\dot{\vec{L}} \perp \vec{L} \Rightarrow |\vec{L}|$ ist konstant

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{T} \cdot dt$$

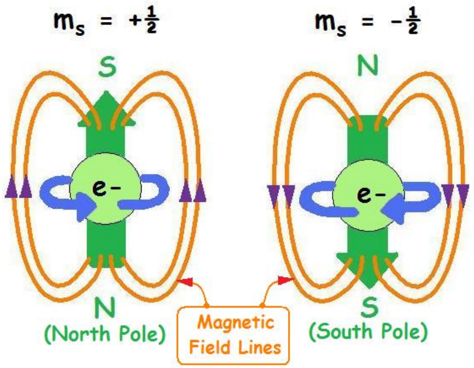
$\vec{L}$ dreht sich um einen Winkel $d\phi$ in dt

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{T \cdot dt}{L} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{T}{L} = \omega_{Präzession}$$

mit $\omega_{Präzession} = \dfrac{m \cdot g \, r_\perp}{I_{Kreisel} \cdot \omega_{Kreisel}}$

Experiment: Kreisel

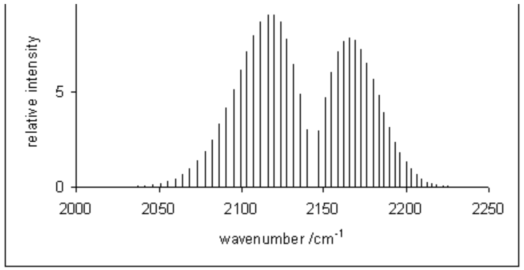
Drehbewegungen in Molekülen und Atomen



http://chemwiki.ucdavis.edu/Physical_Chemistry/Quantum_Mechanics/09._The_Hydrogen_Atom/Atomic_Theory/Electrons_in_Atoms/Electron_Spin

Elektronen und viele Atomkerne
haben einen besonderen Drehimpuls - den **Spin**
Grundlage für ESR, NMR, MRI-Bildgebung

Vibration-Rotation-Spektrum von CO



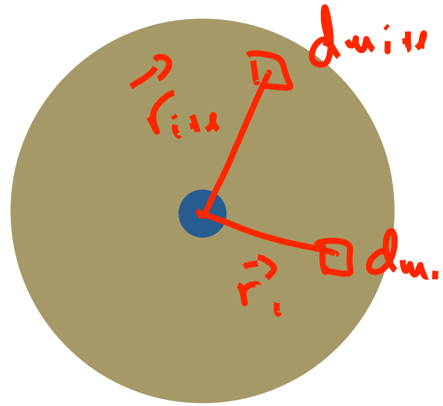
https://en.wikipedia.org/wiki/Rotational_vibrational_spectroscopy

https://en.wikipedia.org/wiki/Microwave_oven

Wassermoleküle werden im **Mikrowellenherd** zu (gehinderten) Rotationen angeregt.

Rotations-Spektroskopie
Gasmoleküle mit elektrischem Dipolmoment können zur Rotation angeregt werden. Aus den Spektren kann z.B. auf die Bindungslängen geschlossen werden.

Wiederholung: Drehbewegungen



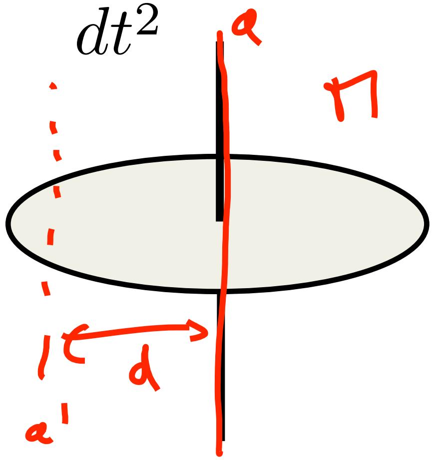
- Die Bewegung eines **starren Körpers** lässt sich aus **Translation** und **Rotation** zusammensetzten
- Bewegungsgleichungen für Drehbewegung: Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung

$$d\vec{\phi} \qquad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$$

- **Trägheitsmoment**:

Einheit:
[*I*] = kg·m^2

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho \, dV$$



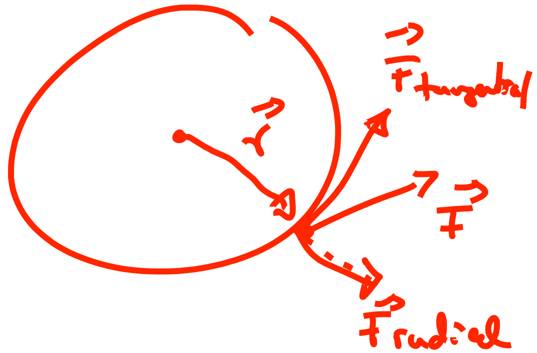
- **Steinerscher Satz**: (über parallele Achsen) $$I_{a'} = I_a + Md^2$$
- **Rotationsenergie:** $$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Zusammenfassung: Drehmoment und Drehimpuls

- **Drehmoment:**

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{T} = |\vec{r}| F_{\text{tangential}}$$



Einheit:
$[T]$ = kg·m²/s² = J

- **Drehimpuls:**

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r_i} \times \vec{v_i}) = I\vec{\omega}$$

Einheit:
$[T]$ = kg·m²/s = J·s

- Wenn keine äußeren Drehmomente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant!
- Wenn äußere Drehmomente wirken, ändern sie den Gesamtdrehimpuls gemäß:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{T}_{Gesamt}$$

Lineare vs. Drehbewegungen

Zu jeder Größe der linearen Bewegung gibt es eine korrespondierende Größe der Drehbewegung. Die Gleichungen für beide Bewegungsformen sind formal gleich!

http://sportsnscience.utah.edu/2012/09/04/skiing-friction-basic/

http://de.wulffplag.wikia.com/wiki/Datei:Kettenkarussell.jpg

Weg, Verschiebung	Drehwinkel	$\vec{\phi}$
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$
Masse	Trägheitsmoment	I
Impuls	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \cdot \omega$
Kraft	Drehmoment	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$
Kinetische Energie	Rotationsenergie	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$