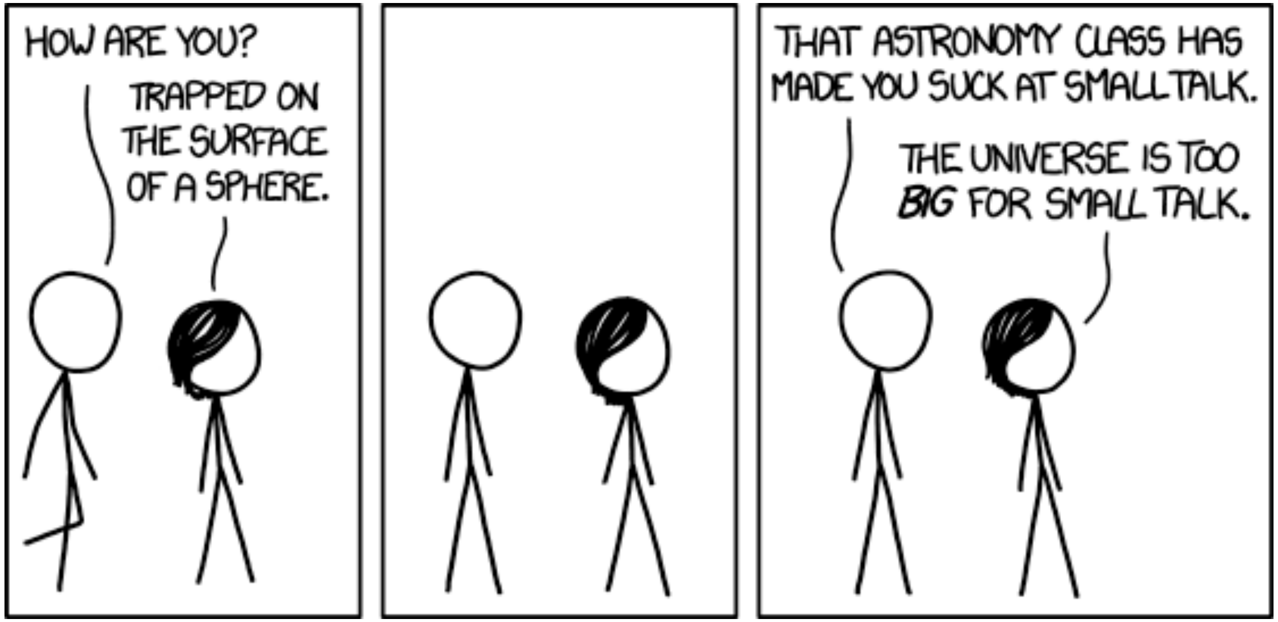
Energie
Physik 1 für Chemiker und Biologen
5. Vorlesung



http://xkcd.com/1248/

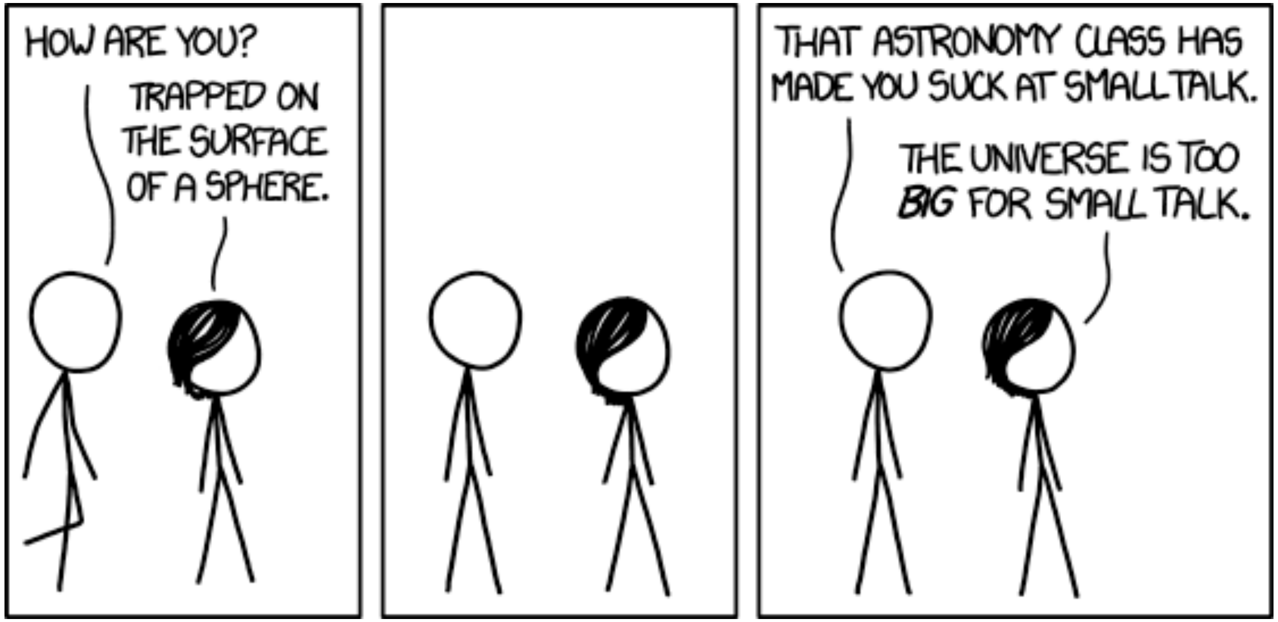
Heute:
- Gravitation
- Arbeit, Energie, Leistung

Prof. Dr. Ralf Jungmann
Jungmann@physik.lmu.de
Prof. Dr. Jan Lipfert
Jan.Lipfert@lmu.de

https://xkcd.com/123/

Energie

Physik 1 für Chemiker und Biologen
5. Vorlesung



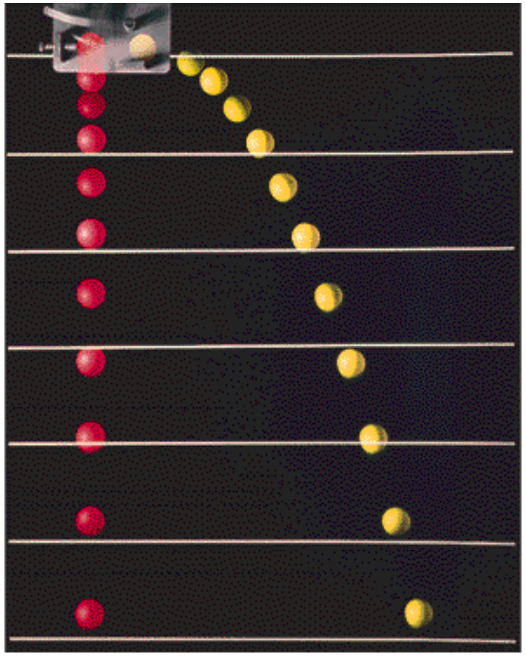
http://xkcd.com/1248/

Heute:
- Gravitation
- Arbeit, Energie, Leistung

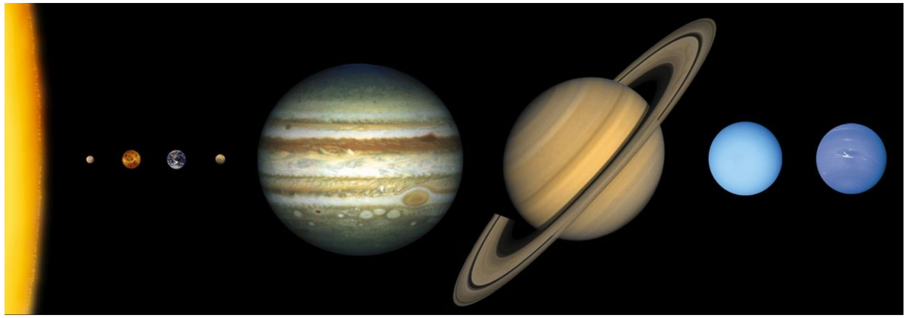
https://xkcd.com/123/

Zwei Phänomene – Eine Ursache

Freier Fall
(Galileis Fallgesetze)



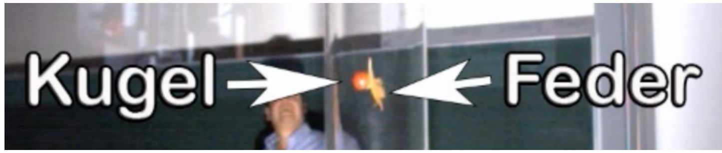
Planetenbewegung
(Keplers Gesetze)



https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnensystem

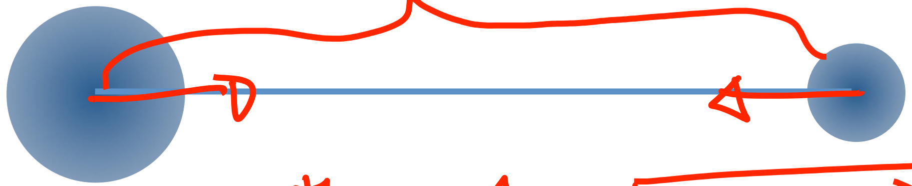
Freier Fall <u>und</u> Planetenbewegungen können gleichermaßen durch Newtons Axiome + Newtons Gravitationsgesetz beschrieben werden

Gravitationsgesetz

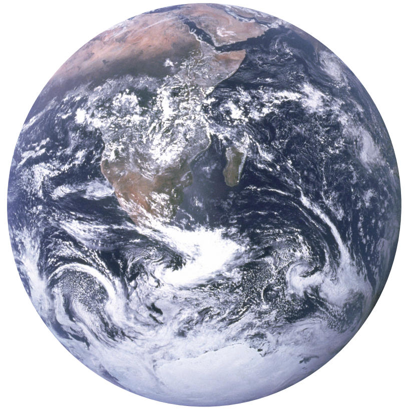


$\vec{F}_{Mm}$ $\quad r \quad$ $\vec{F}_{mM}$

M



m



https://de.wikipedia.org/wiki/Erde

$$\vec{F}_G = -G\,\frac{M\cdot m}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}$$

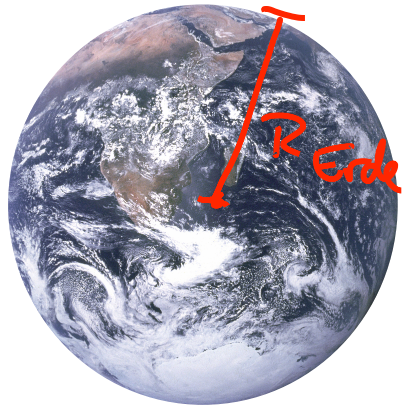
$$|F_{Kugel}| = m_K\cdot|a_K| = G\,\frac{M\,m_K}{r^2}$$

$$|F_{Feder}| = m_F\cdot|a_F| = G\,\frac{M\,m_F}{r^2}$$

$$\Rightarrow\quad |a_F| = |a_K|$$

Gravitationskonstante G = 6,6743 · 10^{-11} $m^3/(s^2\cdot kg)$

Wie hängt G mit g zusammen?



https://de.wikipedia.org/wiki/Erde

$$\vec{F}_{Mm} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{g}$$

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

$$g = \frac{G M_{Erde}}{R_{Erde}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg}{(6370 \cdot 10^3\,m)^2}$$

$$= 9{,}81\,m/s^2$$

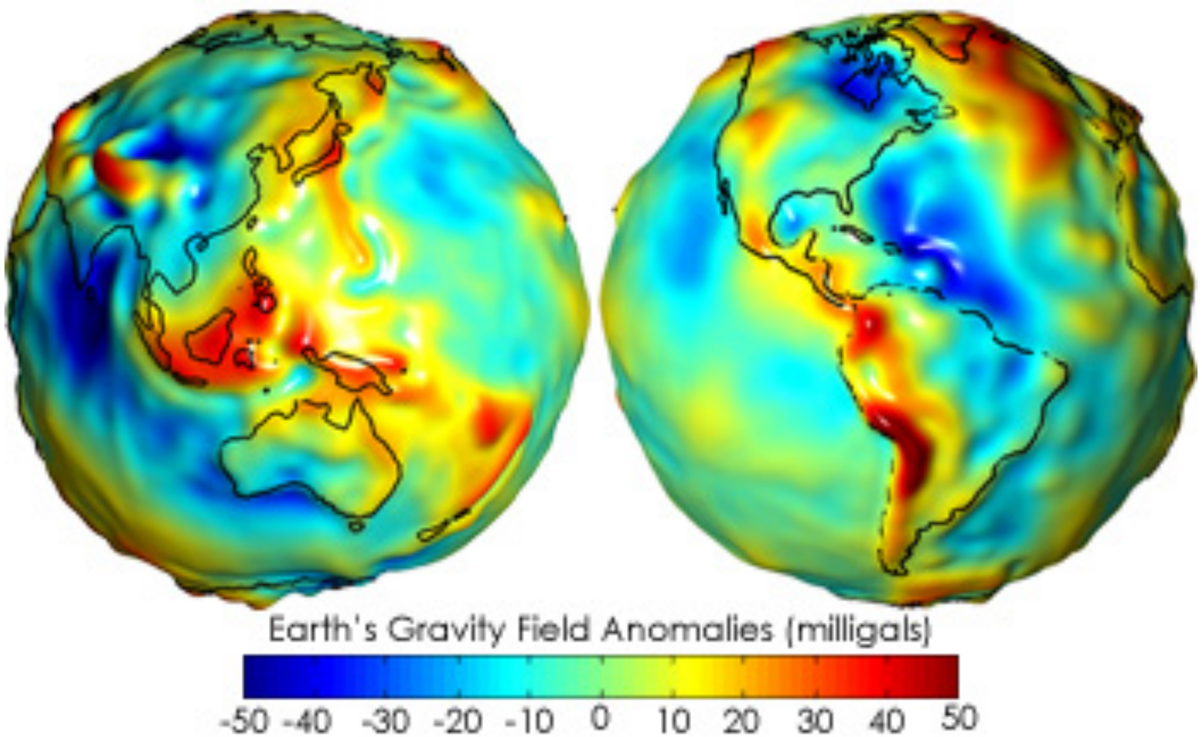
$R_{Pol} = 6350\,km$

$R_{Äquator} = 6378\,km$

$$a_{zentripetal,\,Äquator} = \omega^2 \cdot R_{Erde} = 0{,}034\,\frac{m}{s^2}$$

g ist nicht überall gleich, denn die Erde
- ist keine (perfekte) Kugel
- rotiert
- ist nicht komplett homogen

Gravimetrie der Erdoberfläche

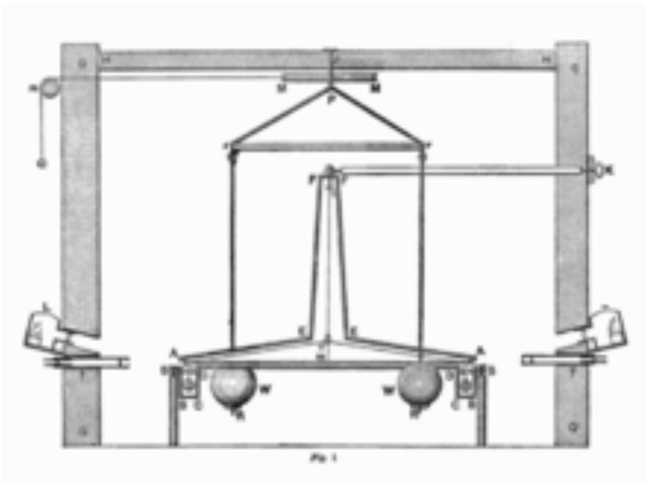


Lokale Variationen der Schwerkraft der Erde: GRACE Satelliten Mission (NASA & DLR)

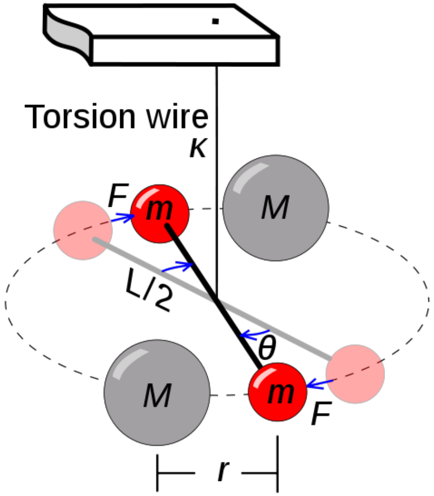
Einheit: 1 Gal = 1 cm/s² = 0,01 m/s² („Galileio")
≈ ein Promille der durchschnittlichen Erdbeschleunigung von ca. 9,81 m/s² ≈ 10 m/s² = 1000 Gal
Anwendungen: z.B. Messungen von Eismassen & Ozeanströmungen (Klima!), Finden von Bodenschätzen (Erze, Öl, etc.), Geologie und Geodynamik

„Die Erde wiegen" – Wie groß ist G?

Erste Bestimmung der Gravitationskonstante durch Henry Cavendish 1798 mittels einer **Torsionswaage**



https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Cavendish



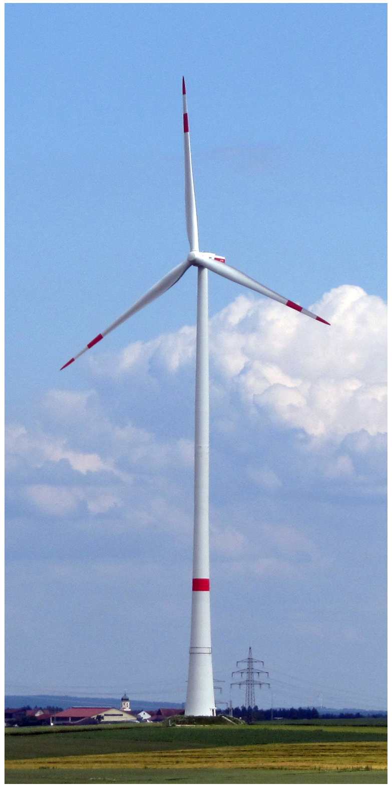
https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationswaage

https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Cavendish

Henry Cavendish (1731-1810)

- Verdrillung von Faden erfordert Kraft F
- Kraft ist proportional zu Verdrillungswinkel θ (ähnlich Hooksches Gesetz)
- über Kalibrierung läßt sich aus θ Kraft F berechnen

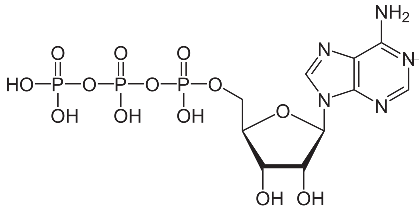
Arbeit und Energie



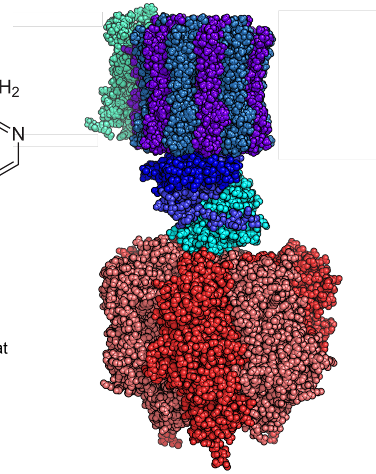
https://de.wikipedia.org/wiki/Windkraftanlage

https://de.wikipedia.org/wiki/Wasserkraftwerk

https://en.wikipedia.org/wiki/Olympic_weightlifting

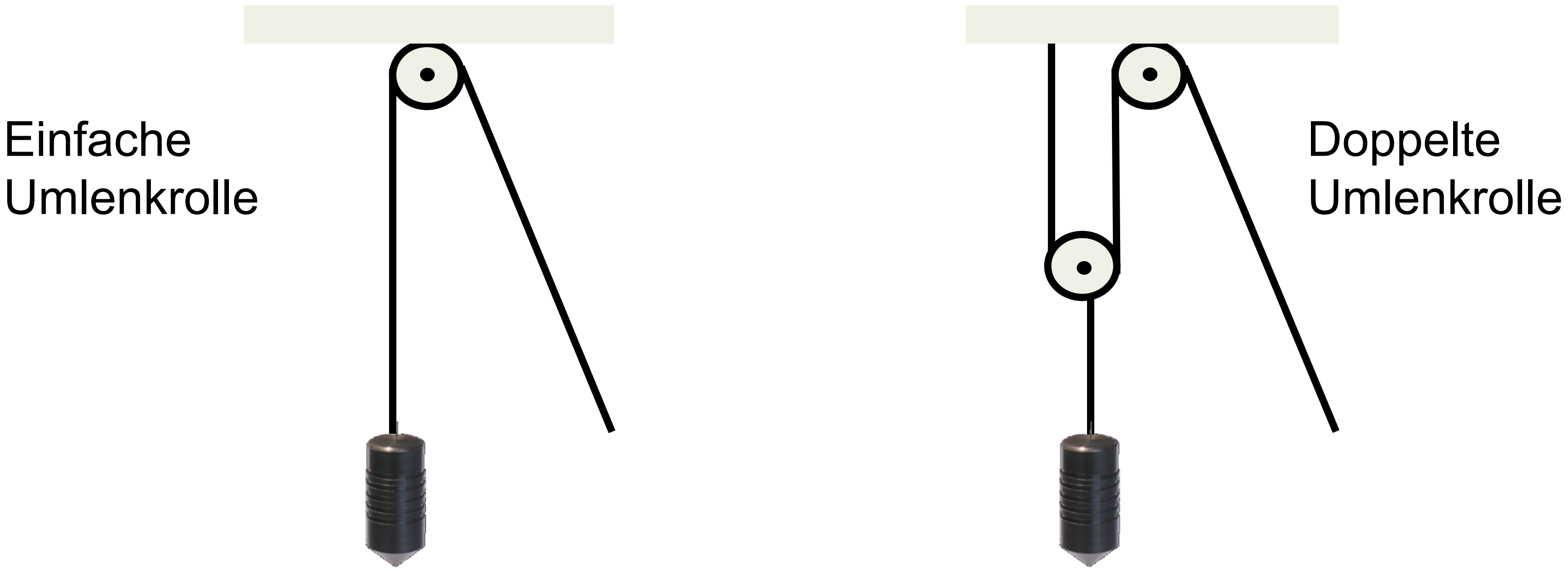


https://de.wikipedia.org/wiki/Adenosintriphosphat



https://en.wikipedia.org/wiki/ATP_synthase

Heben einer Masse

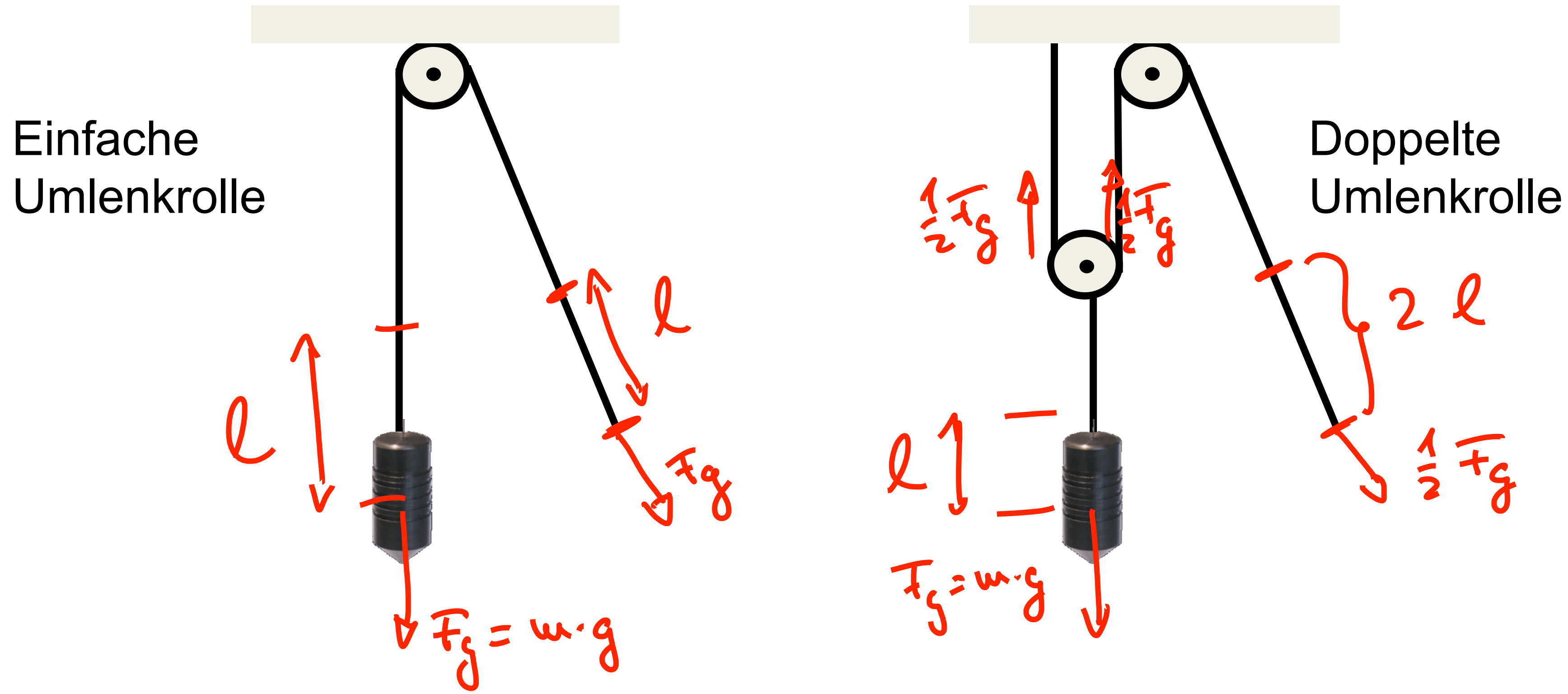


Experiment: Umlenkrolle & Flaschenzug

Zum Heben der gleichen Masse um eine gewisse Strecke, benötigt man mit zwei Umlenkrollen, im Vergleich zu nur einer Rolle:

A) Die gleiche Kraft, muss aber weniger weit ziehen.
B) Eine größere Kraft, muss aber weniger weit ziehen.
C) Man zieht gleich weit, aber mit weniger Kraft.
D) Eine geringer Kraft, man muss aber weiter ziehen.

Die „Goldene Regel“ der Mechanik



$$F\,\Delta x = F_g \cdot l$$

$$F \cdot \Delta x = \tfrac{1}{2} F_g \cdot 2l$$
$$= F_g\, l$$

Kraft · Weg = konstant

„There is no free lunch!“

Arbeit

Physikalische Definition der Arbeit W („Work“):

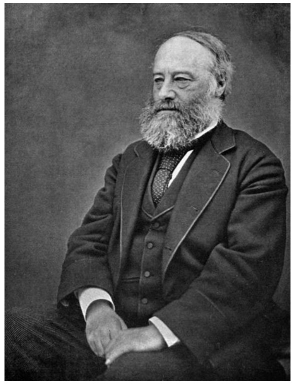
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}| \cdot \cos\alpha$

α ∢ zwischen $\vec{F}$ und $\Delta\vec{r}$

$\vec{F}\,\Delta\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$

(Skalarprodukt)



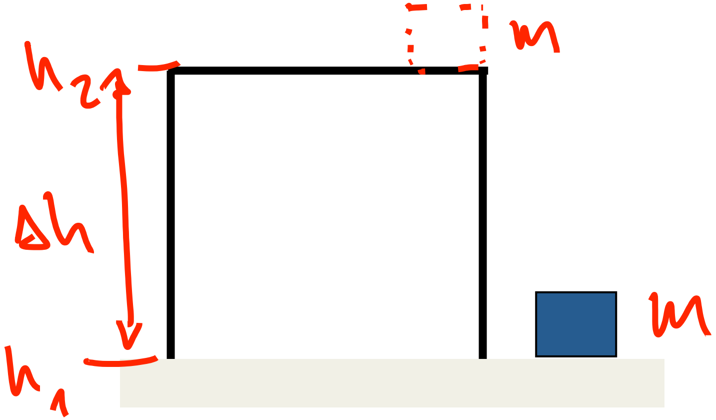
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Prescott_Joule

James Prescott Joule (1818-1889)

Einheit: [W] = N·m = J = kg·m^2/s^2 („Joule“)

Verschiedene Formen der Arbeit

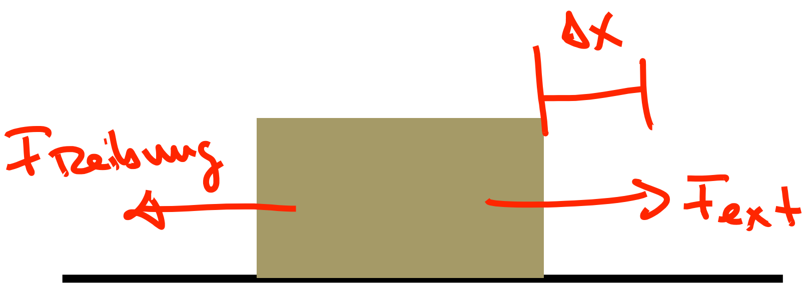
Hubarbeit: Masse *m* wird auf der Erde vom Boden auf den Tisch gehoben.



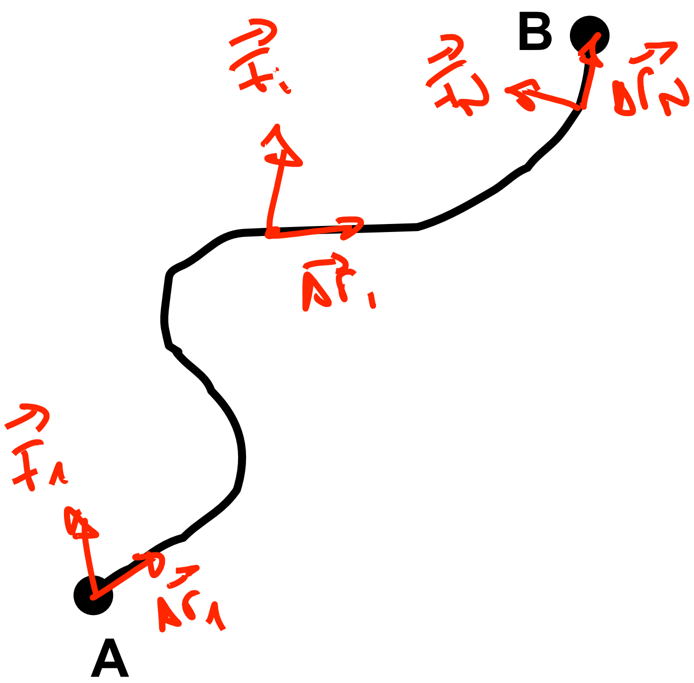
$$W = F \cdot \Delta r$$
$$= m \cdot g\,(h_2 - h_1)$$
$$= m\,g \cdot \Delta h$$

Reibungsarbeit: Objekt wird gegen Reibungskraft über eine Ebene bewegt.

$$W = F \cdot \Delta x = F_{Reibung}\,\Delta x = \mu_{R,G}\,|F_N| \cdot \Delta x$$



Arbeit für variable Kraft und Richtung



$$W(A,B) = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \ldots + \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i + \ldots + \vec{F}_N \cdot \Delta\vec{r}_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$= \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Allgemeine Definition der Arbeit

$$W(a,b) = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

„Spannarbeit": Arbeit und Federkraft

$$W(a,b) = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{r}$$

https://miss-wrights-wiki.wikispaces.com/Yr+7+Forces

$$W(0,x) = \int_0^x -F_{Feder} \cdot dx'$$

$$= \int_0^x k x' \, dx' = \frac{1}{2} k x'^2 \Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} k x^2$$


https://en.wikipedia.org/wiki/Archery

Kinetische Energie

Reibungsfreie Bewegung, Beschleunigung durch eine Kraft *F* über *Δr*

Erinnere: $a = const$ $\quad v = at + v_0$ $\quad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta r} = \sqrt{2 \frac{F}{m} \cdot \Delta r} = \sqrt{\frac{2}{m} W}$$

Newton II

Definition der Arbeit

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m v^2$$

Kinetische Energie
(für v << Lichtgeschwindigkeit):

$$\boxed{E_{kin} = K = \frac{1}{2}mv^2}$$

Konservative Kräfte und Potentielle Energie

Hängt die insgesamt geleistete Arbeit vom Weg ab?

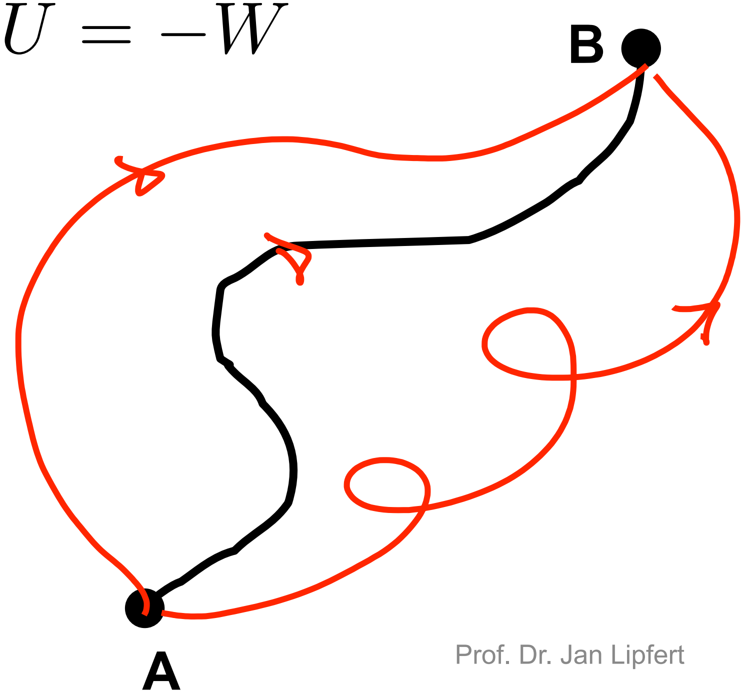
NEIN!

JA!

Konservative Kräfte:
z.B. Gravitation, Federkraft, elektrostatische Kraft …

$$\Delta E_{pot} = \Delta U = -W$$

Nicht-Konservative Kräfte:
z.B. Coriolis-Kraft, Lorentzkraft, Reibungskraft …



Konservative Kräfte & potentielle Energie

- Für konservative Kräfte gilt: ***Die Gesamtarbeit, die die Kraft verrichtet, ist unabhängig vom Weg***

→ geschlossener Weg

$$W = \int_{r_A}^{r_A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Entlang eines geschlossenen Weges ist die verrichtete Arbeit Null!

- Für konservative Kräfte ist es nützlich, die potentielle Energie zu definieren:

$$\Delta E_{pot} = -W = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

	F	E_{pot}
z.B. Schwerkraft.	$-m \cdot g$	$m \cdot g \cdot h$
z.B. Federkraft	$-kx$	$\frac{1}{2} k x^2$

Zusammenhang von E_{pot} und F

$$\Delta E_{pot} = -W = -F\Delta x \;\Rightarrow\; -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta x} = F$$

$\lim \Delta x \to 0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{F = -\frac{dE_{pot}}{dx}}$$

z.B. Schwerkraft:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \;\Rightarrow\; F_g = -\frac{dE_{pot}}{dh} = -m \cdot g$$

z.B. Federkraft

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 \;\Rightarrow\; F_{Feder} = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -kx$$

d.h. eine beliebige (Integrations-)Konstante ist irrelevant für die Kräfte!

Energieerhaltungssatz der Mechanik

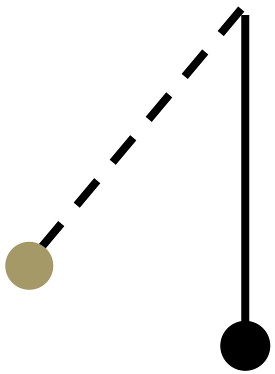
Für ein abgeschlossenes System in dem nur konservative Kräfte wirken:

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$

$\frac{1}{2} m v^2$

z.B. $\frac{1}{2} k x^2$, $m \cdot g \cdot h$

Schwerkraft



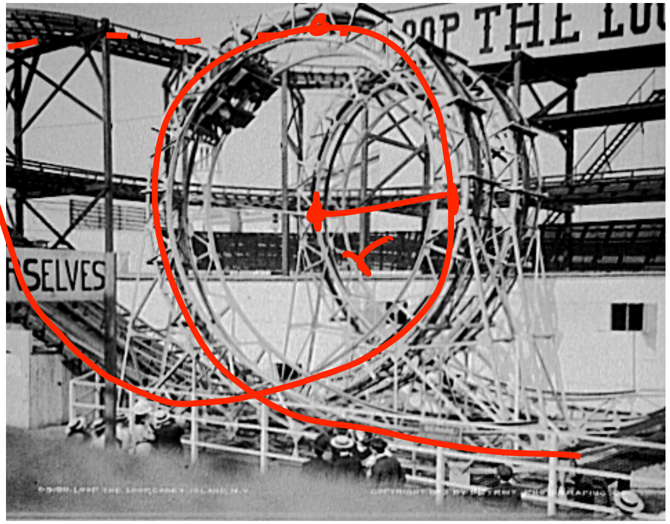
Pendel wandelt periodisch ***E*** $\boldsymbol{E_{kin}}$ in $\boldsymbol{E_{pot}}$ um (und umgekehrt)

Experiment: Verkürztes Pendel

„Loop the loop“ - revisited

Wie hoch muss die (als reibungslos angenommene) Achterbahn starten, um die Minimalgeschwindigkeit im Loop zu haben?

Δh



https://en.wikipedia.org/wiki/Loop_the_Loop_%28Coney_Island%29

“Loop the Loop” (Coney Island)

Halten: $|F_g| = |F_Z|$

$\Rightarrow v_{min} = \sqrt{g \cdot r}$

$E_{kin,min} = \frac{1}{2} m v_{min}^2 = \frac{1}{2} m g \cdot r$

$E_{pot} = \cancel{m} \cdot g \cdot \Delta h = E_{kin,min} = \frac{1}{2} \cancel{m} g \cdot r$

$\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2} r$

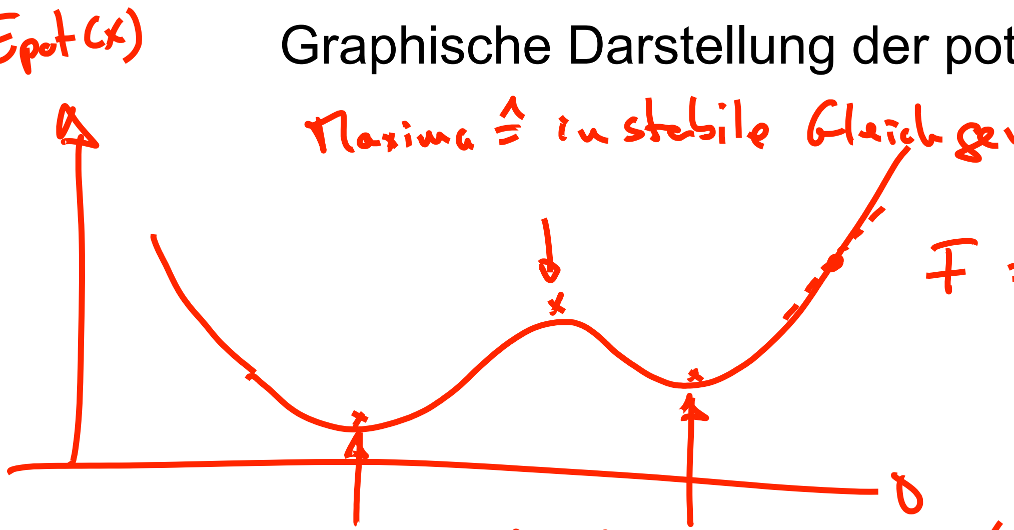
$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$

als Lösungsstrategie

Potentielle Energie-„Landschaft“

Graphische Darstellung der potentiellen Energie

Maxima ≙ instabile Gleichgewichtslagen



$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx}$$

Minima ≙ stabile Gleichgewichtslagen

- Steigung = − Kraft
- Minima = stabile Gleichgewichtslagen
- Maxima = labile Gleichgewichtslagen

Potentielle Energie der Gravitation

Was ist die potentielle Energie der Gravitation?

Integriere F_G!

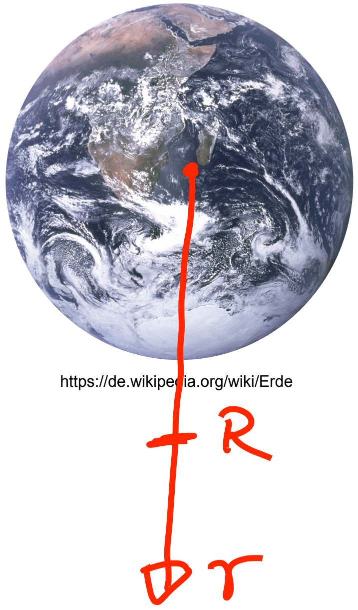
$$F_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

$$E_{pot,G} = -W_G = -\int_{\infty}^{R} F_G(r)\cdot dr$$

$$= \int_{\infty}^{R} G\frac{M\cdot m}{r^2}\,dr = -G\frac{M\cdot m}{r}\Bigg|_{\infty}^{R}$$

$$= -G\frac{M\cdot m}{R} + 0$$

Setze: $E_{pot,G} = 0$ bei $r = \infty$



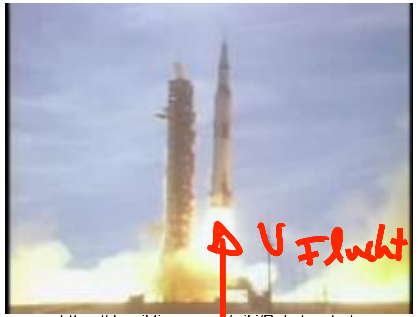
https://de.wikipedia.org/wiki/Erde

Fluchtgeschwindigkeit

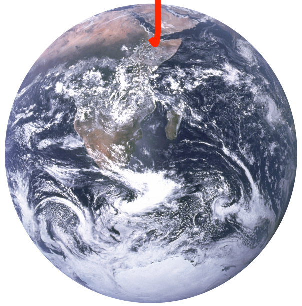
Wie schnell muss ein Objekt sein, um die Erde zu verlassen?

Erinnerung: Für ein abgeschlossenes System in dem nur konservative Kräfte wirken gilt der **Energieerhaltungssatz der Mechanik**:

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$



https://de.wiktionary.org/wiki/Raketenstart



https://de.wikipedia.org/wiki/Erde

Bei $r = \infty$: $E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = 0$

Bei $r = R_{Erde}$

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m v_F^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R_{Erde}}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2 \cdot G M_{Erde}}{R_{Erde}}}$$

$$\Rightarrow v_{Flucht, Erde} = 11{,}2 \, \frac{km}{s}$$

Allgemeiner Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie konstant

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} + \Delta E_{therm} + \Delta E_{int} = 0$$

ΔE_{mech}

Thermodynamik; stat. Physik

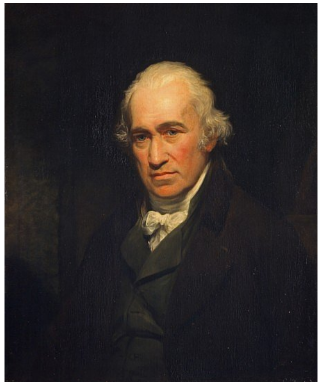
z.B. chemie Energie

Experiment: Wärmeäquivalent

Leistung

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Einheit: [P] = W = J/s = kg·m²/s³



https://de.wikipedia.org/wiki/James_Watt

James Watt
(1736-1819)

10 Liegestütz in 9s

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{10 \cdot m \cdot g \cdot h}{\Delta t} = \frac{10 \cdot 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{s}} = 330\,\mathrm{W}$$

10 Streckesprünge in 13s

$$P = \frac{10 \cdot 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{m}}{13\,\mathrm{s}} = 450\,\mathrm{W}$$

10 Burpees in 25s.

$$P = \frac{10 \cdot 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{s}} = 350\,\mathrm{W}$$

Experiment: Sportliche Leistung

Leistung

SI Einheit: „Watt“
[P] = W = J/s = kg·m²/s³

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Pferderennen

- (Mechanische) Leistung eines Menschen:
  - 500 – 1000 W (kurzzeitig)
  - ~100-200 W (Dauerbelastung)

- Alternative (nicht SI!) Einheit **„Pferdestärke“**

1 PS ≈ 735 W

Ein PS ist ungefähr die Leistung, die ein Pferd auf Dauer erbringen kann

- Elektrische Leistung und Energie

1000 W = 1 kW

kWh ⇒ Energieeinheit

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Drehstromzaehler-Obernjesa.jpg

Autobahn, revisited

$$|F_W| = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2$$

- Dichte des strömenden Fluids ρ
- Referenzfläche A
- Strömungsgeschwindigkeit v und
- Strömungswiderstandskoeffizienten C_w.

Wie viel mehr Motor<u>leistung</u> ist nötig,
um mit 150 km/h statt 112 km/h zu fahren?

$F \sim v^2$ (Newton-Reibung)

$W = F \cdot \Delta x \sim v^2$

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \sim v^3$

$$\frac{P_{Autobahn}}{P_{Highway}} = \left(\frac{150 \frac{km}{h}}{112 \frac{km}{h}} \right)^3 \approx 2{,}4$$

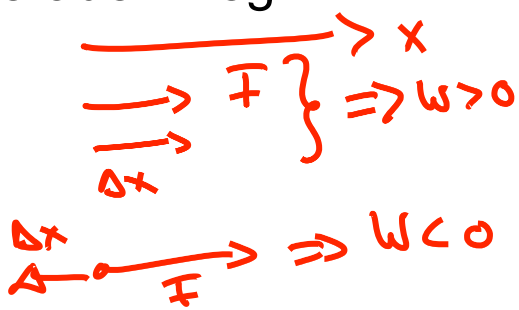
https://de.wikipedia.org/wiki/Autobahn

http://www.freefoto.com/preview/1216-07-33/Speed-Limit-70-Sign--Route-95--Nevada--USA

Zusammenfassung: Arbeit (= „Kraft mal Weg")

- 1D, konstante Kraft, gerader Weg

$$W = F\Delta x$$



- 1D, allgemein

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx$$

- 3D, konstante Kraft, gerader Weg

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- 3D, allgemein

$$W = \int_{\vec{r_A}}^{\vec{r_B}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Einheit: „Joule"
[W] = N·m = J = kg·m^2/s^2

Alternative Einheiten:

Kalorie: 1 cal ≈ 4,18 J

Die Energie, die nötig ist um ein Gramm Wasser um ein Grad Kelvin zu erwärmen.

In der (Bio)chemie häufig:
kcal/mol = 4,18 kJ/mol = 6.95·10^{-21} J

Zusammenfassung: Konservative Kräfte & potentielle Energie

- Für konservative Kräfte gilt: ***Die Gesamtarbeit, die die Kraft verrichtet, ist unabhängig vom Weg***

$$W = \int_{\vec{r_A}}^{\vec{r_A}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Entlang eines geschlossenen Weges ist die verrichtete Arbeit Null!

- Potentielle Energie und Kraft:

$$\Delta E_{pot} = -W = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_{pot}}{dx}}$$

3D:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Energieerhaltungssatz der Mechanik (wenn nur konservative Kräfte wirken):

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$$