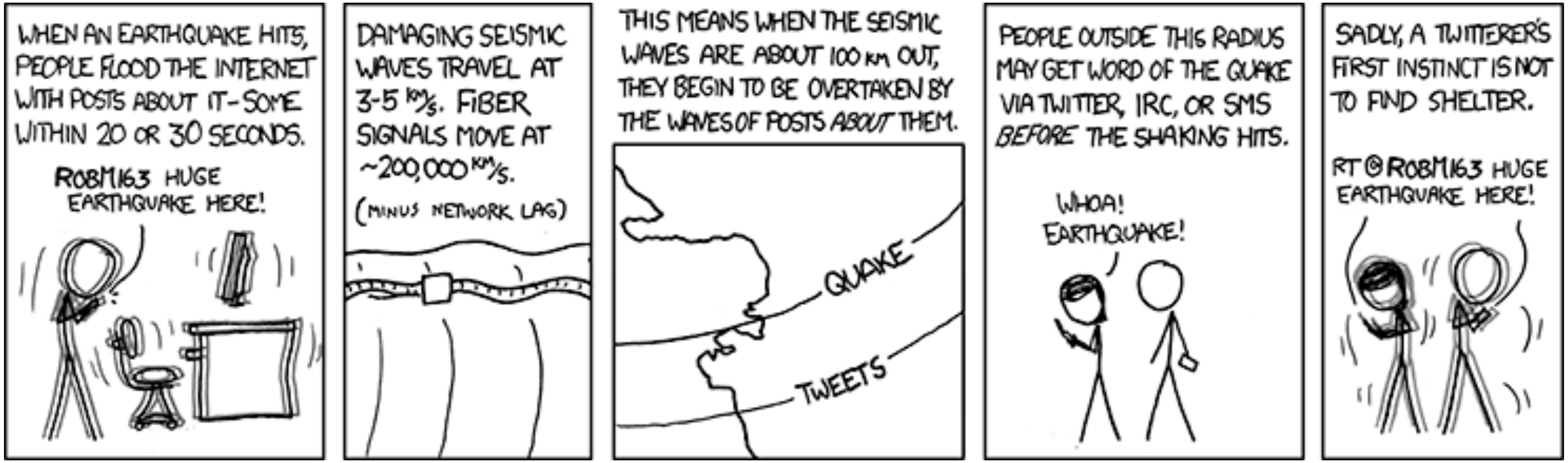
Wellen

Physik 1 für Chemiker und Biologen
10. Vorlesung



https://xkcd.com/723/

Heute: Wellen
- Longitudinal und Transversal
- Harmonische Wellen
- Superpositionsprinzip

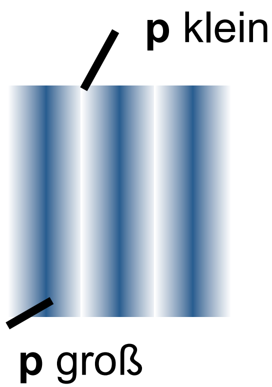
Prof. Dr. Ralf Jungmann
Jungmann@physik.lmu.de
Prof. Dr. Jan Lipfert
Jan.Lipfert@lmu.de

Beispiele für Wellen

Wasserwellen

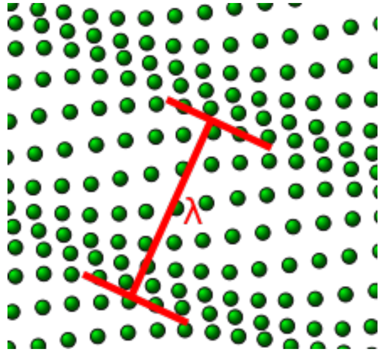
https://de.wikipedia.org/wiki/Wasserwelle

Schallwellen



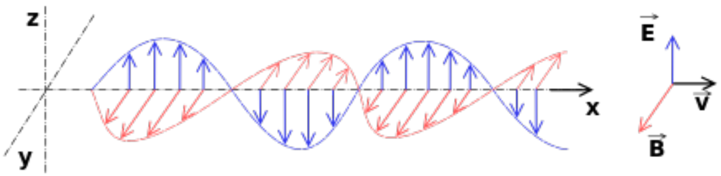
Phononen

(Gitterschwingungen im Festkörper)

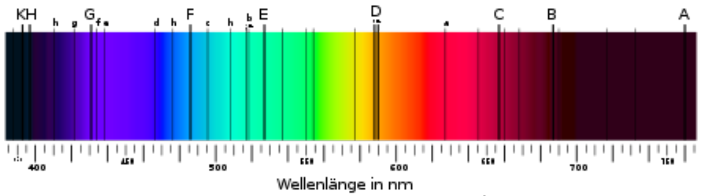


https://de.wikipedia.org/wiki/Phonon

Elektromagnetische Wellen



https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle



https://de.wikipedia.org/wiki/Fraunhoferlinie

Quantenmechanische Wellen

Teilchen als Welle:
de Broglie-Wellenlänge

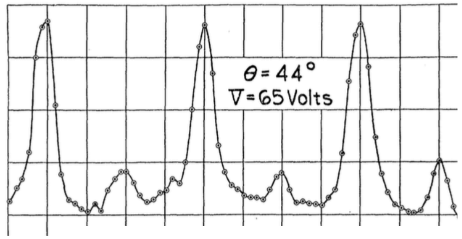
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

h = 6,626 · 10^{-34} J·s
(Plancksches Wirkungsquantum)

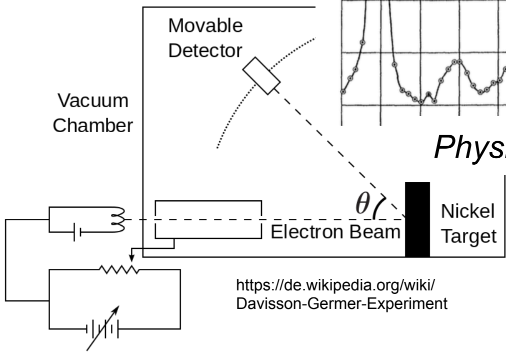
https://de.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie

Louis-Victor de Broglie
(1892-1987)

Wellenverhalten von Elektronen:
Davisson & Germer (1927)

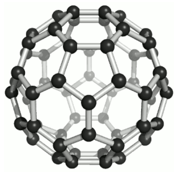


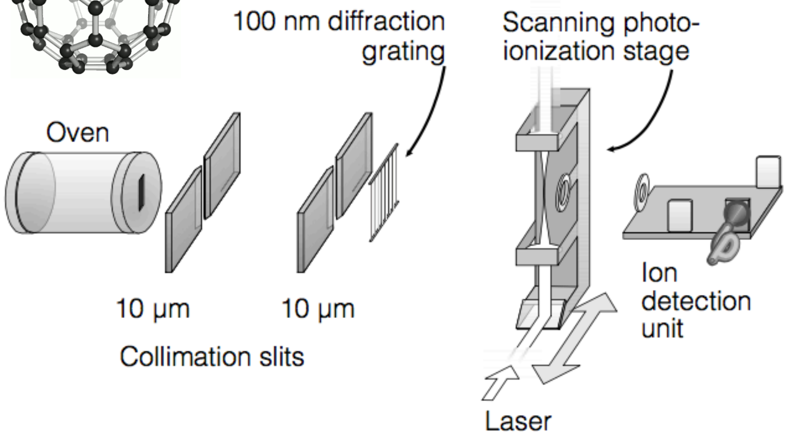
Physical Review (1927)



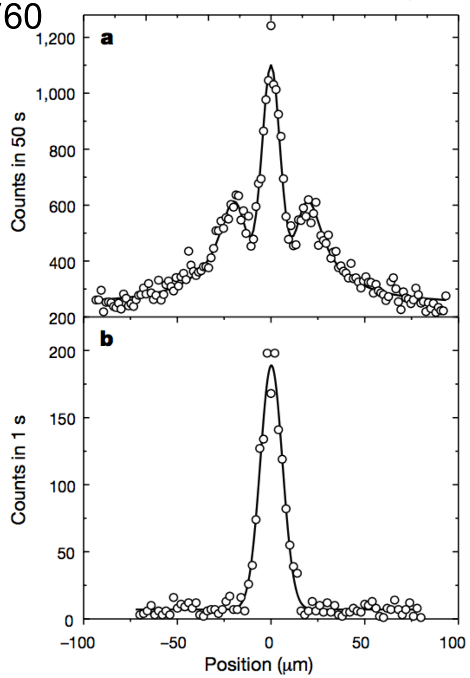
https://de.wikipedia.org/wiki/Davisson-Germer-Experiment

Interferenzexperiment mit C_{60}
Molekülen („Buckyballs“)





Arndt, *Nature* (1999)

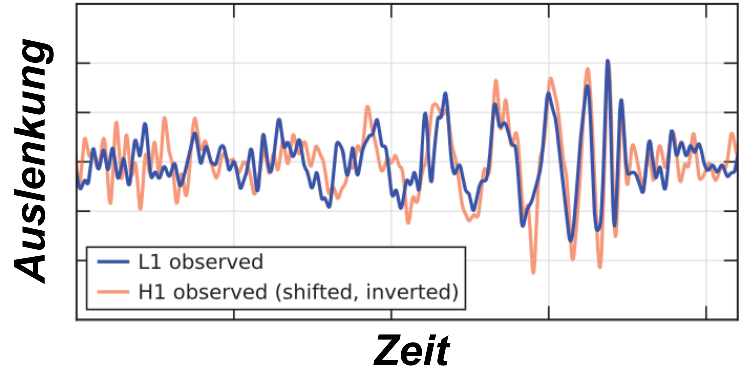


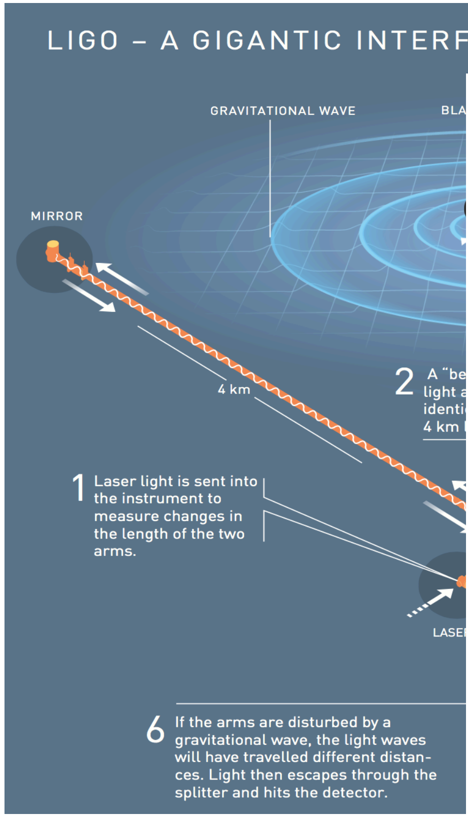
Gravitationswellen

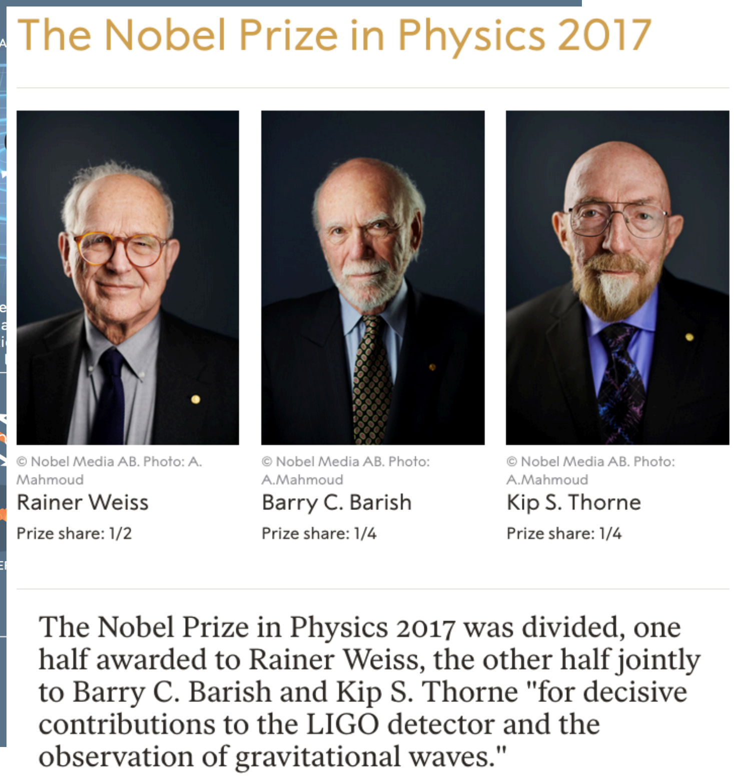
Abbott et al., *Phys. Rev. Letters* (2016)

Gravitationswellen sind Schwingungen der Raumzeit

- Breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus
- 1916 Vorhersage durch Albert Einstein
- 2016 Erste Detektion durch den LIGO Detektor







The Nobel Prize in Physics 2017

© Nobel Media AB. Photo: A. Mahmoud
Rainer Weiss
Prize share: 1/2

© Nobel Media AB. Photo: A.Mahmoud
Barry C. Barish
Prize share: 1/4

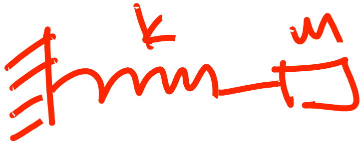
© Nobel Media AB. Photo: A.Mahmoud
Kip S. Thorne
Prize share: 1/4

The Nobel Prize in Physics 2017 was divided, one half awarded to Rainer Weiss, the other half jointly to Barry C. Barish and Kip S. Thorne "for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves."

https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017/summary/

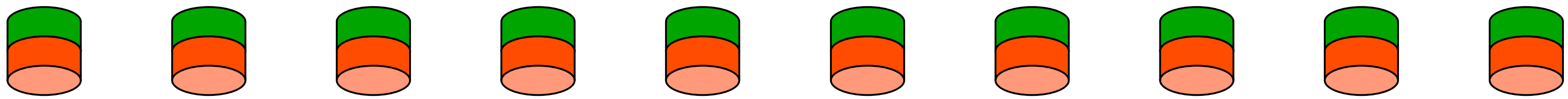
Von der Schwingung zur Welle

Bisher: **1** Masse an **1** Feder



Jetzt: Viele (gleiche) Massen und Federn

Abstoßende Kraft zwischen Magnetrollen sorgt für nahezu harmonisches Kraftgesetz.



$y(x,t) = f(\underbrace{x-ct})$

(Auslenkung am Ort x zur Zeit t

$x - ct \mathrel{\hat{=}}$ Phase der Welle

$c \mathrel{\hat{=}}$ Geschwindigkeit der Welle

Experiment: Magnetrollen

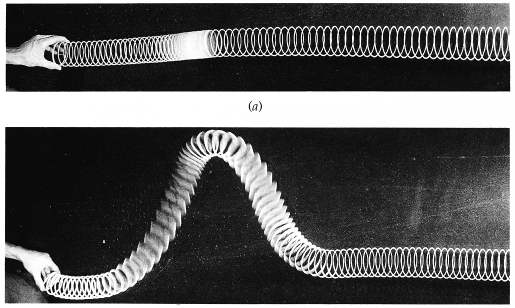
Longitudinale und transversale Wellen

Longitudinal
- Richtungen von Auslenkung und Ausbreitung sind <u>parallel</u>
- Einzig mögliche Wellenform in Gasen und Flüssigkeiten (z.B. Schallwellen)

http://footage.framepool.com/de/shot/337653757-schunkeln-dirndl-lederhose-theresienwiese

Transversal
- Richtungen von Auslenkung und Ausbreitung sind <u>senkrecht</u>
- <u>Polarisation</u> möglich
- Beispiele: elektromagnetische Wellen, Seilwellen, „optische“ Phononen im Festkörper

https://de.wikipedia.org/wiki/La_Ola

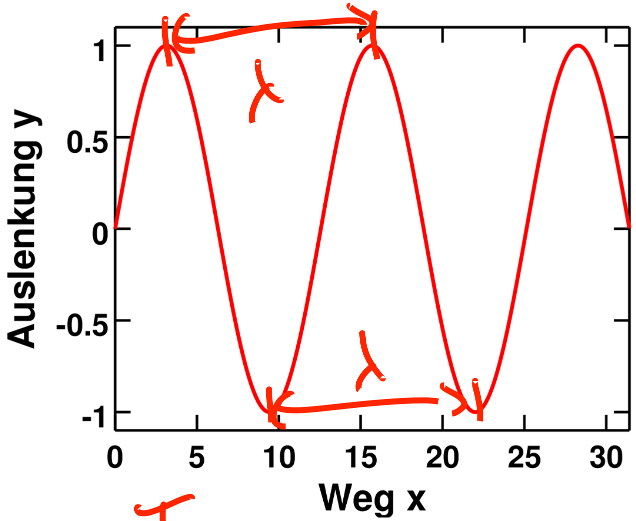


Aus P.A. Tipler, Physik

Wichtiger Spezialfall: Harmonische Wellen

Ein gespanntes Seil werde an einem Ende sinusförmig (bzgl. der Zeit) **y = sin (*ωt*)** ausgelenkt. **Verhalten des Seiles (ohne Dämpfung):**

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$



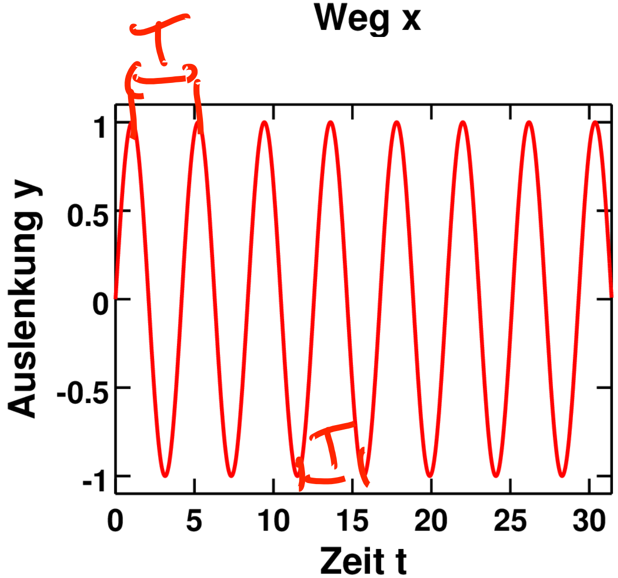
„Photo der Welle"

$t = \text{fest} \Rightarrow A \sin(kx)$

$k \cdot \lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Harmonisches Verhalten bezüglich *x* und *t* !

Experiment: Wellenkette



„Welle vorbeiziehen lassen"

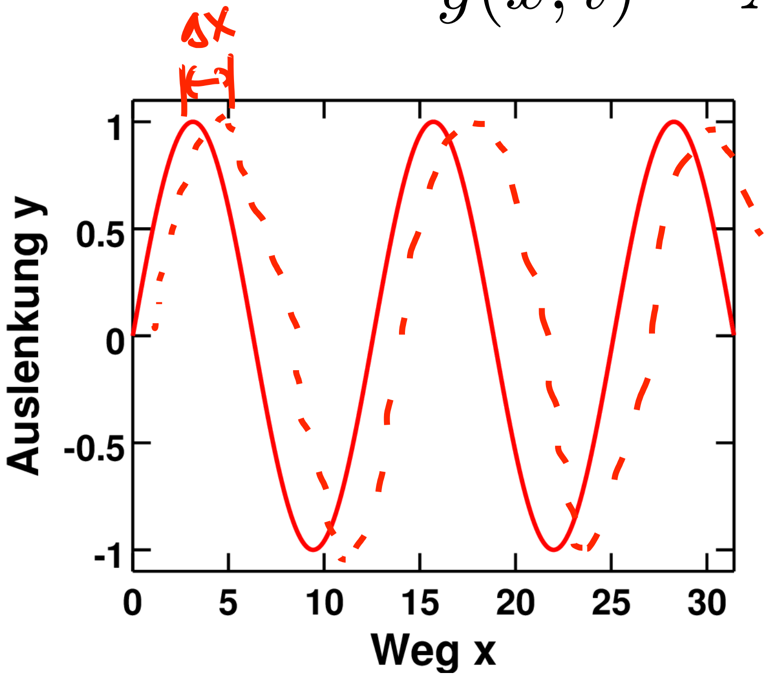
$x = \text{fest} \Rightarrow A \sin(\omega t + \phi)$

$\omega \cdot T = 2\pi$

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

Geschwindigkeit einer Welle

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$



Mit der Welle „mitlaufen":

$kx - \omega t = \text{const.}$

Geschwindigkeit? ⇒ Zeitableitung!

$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}$

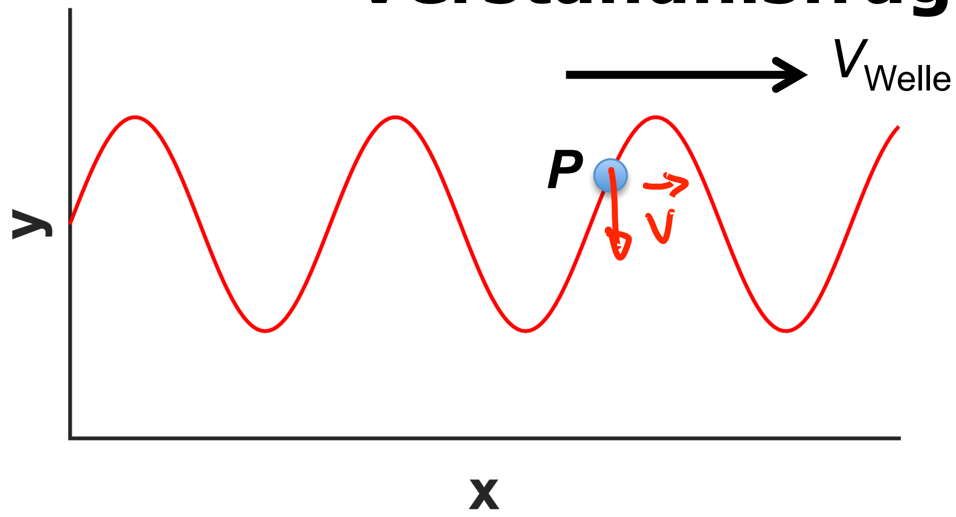
Geschwindigkeit:

$\frac{dx}{dt} = v = c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$

$kx - \omega t \Rightarrow$ Welle läuft in $+x$-Richtung

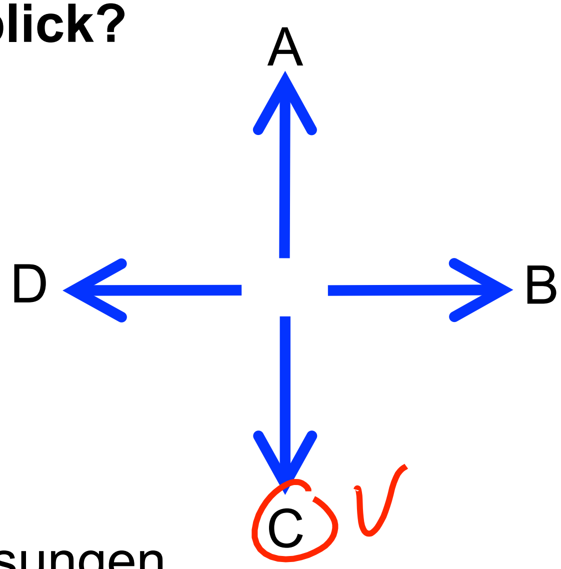
$kx + \omega t \Rightarrow$ Welle läuft in $-x$-Richtung

Verständnisfrage Wellen 1



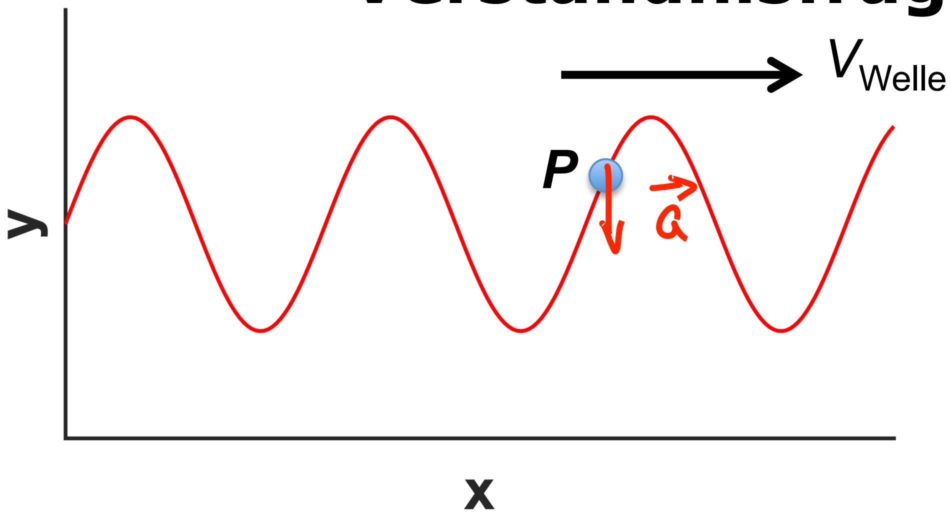
Der Graph zeigt den Schnappschuss einer Seilwelle, die sich nach rechts ausbreitet. Punkt P ist mit Farbe markiert.

In welche Richtung zeigt die Geschwindigkeit des markierten Punktes P in diesem Augenblick?



E) Keine dieser Lösungen

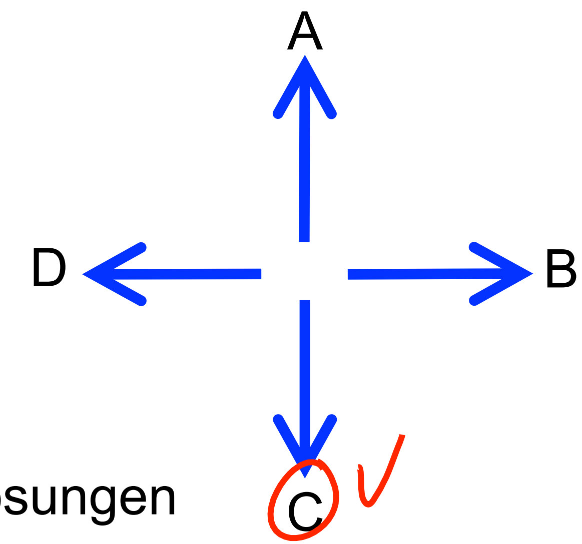
Verständnisfrage Wellen 2



Der Graph zeigt den Schnappschuss einer Seilwelle, die sich nach rechts ausbreitet. Punkt P ist mit Farbe markiert.

In welche Richtung zeigt die BESCHLEUNIGUNG des markierten Punktes P in diesem Augenblick?

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$$



E) Keine dieser Lösungen

Wellengleichung und Wellengeschwindigkeit

Allgemein gehorchen Wellen der Gleichung: $y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

„Kurznotation":

$$\ddot{y} = c^2 y''$$

Lösungen:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y(x,t) = y_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

(Wellengleichung oder d'Alembert Gleichung)

https://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_le_Rond_d'Alembert

Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783)

Die Phasengeschwindigkeit der Welle *c* hängt von den physikalischen Eigenschaften des Systems ab:

Seilwellen: $c^2 = \frac{\tau}{\mu}$

$\tau \to$ Spannkraft

$\mu \to$ Masse pro Länge

Schallwellen: $c^2 = \frac{K}{\rho}$

$K \to$ Kompressionsmodul

$\rho \to$ Dichte

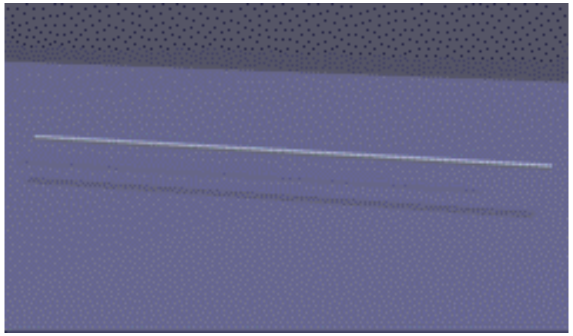
Allgemein: $c^2 = \frac{\text{Elastische Eigenschaft}}{\text{Trägheitseigenschaft}}$

Superposition von Wellen

Superpositionsprinzip: Wenn sich Wellen im gleichen Medium ausbreiten (und sich das Medium linear verhält), ergibt sich eine **resultierende Welle** (oder **Gesamtwelle**), die der Summe der einzelnen Wellen entspricht.

$$y_{Gesamt}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Anas_platyrhynchos_with_ducklings_reflecting_water.jpg



https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Standing_waves1.gif

Aus der Linearität der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

folgt, dass wenn y_1 und y_2 Lösungen sind, $y_{Gesamt} = y_1 + y_2$ ebenfalls eine Lösung ist!

Superposition von Wellen gleicher Amplitude, Frequenz und Richtung mit Phasenunterschied Φ

Häufiger Fall in der Optik, z.B. in einem Interferometer

$$y_{Gesamt}(x,t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\text{mit } \sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\left(\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\Rightarrow y_{Gesamt}(x,t) = \underbrace{2A\cos\left(\tfrac{1}{2}\phi\right)}_{\text{Amplitude}} \sin\left(kx - \omega t + \phi/2\right)$$

Spezialfälle:

i) $\phi = 0$

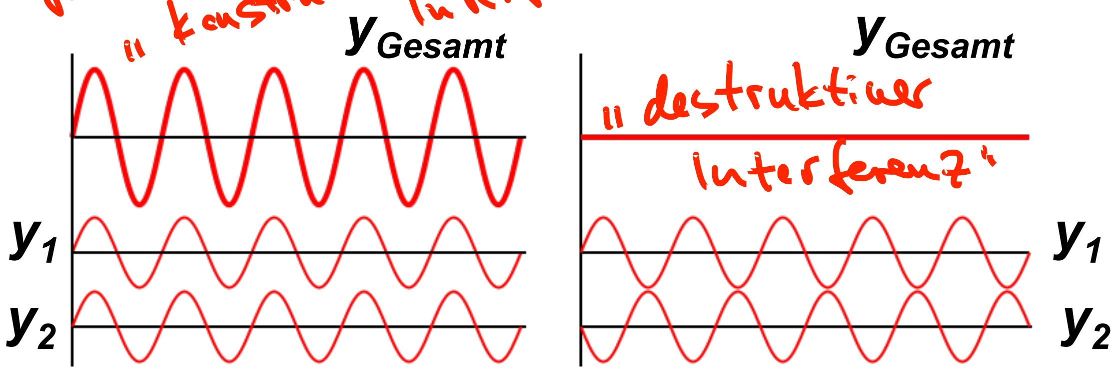
$\Rightarrow y_{Gesamt} = 2A \sin(kx - \omega t)$

„konstruktiver Interferenz"

ii) $\phi = \pi$

$\Rightarrow y_{Gesamt} = 0$

„destruktiver Interferenz"



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Interference_of_two_waves.svg

Stehende Wellen

Superposition von Wellen gleicher Frequenz & entgegengesetzter Richtung (z.B. bei schwingenden Saiten, durch Reflektion an einem festen Ende)

$$y_{Gesamt}(x,t) = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t)$$
$$= \underbrace{2A\sin(kx)}_{\text{Amplitude am Ort } x}\ \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{Schwingungsterm}}$$

Amplitude $= 0$
für $kx = n\cdot\pi$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\Rightarrow x = n\cdot\frac{\lambda}{2}$ „Knoten"

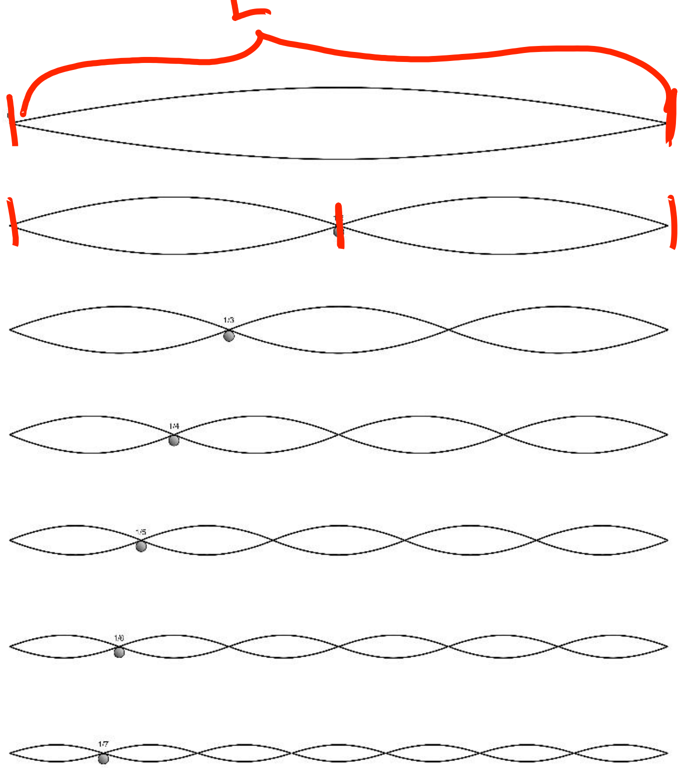
Amplitude maximal
für $kx = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots \Rightarrow x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$

„Bauch"

Experiment: Stehende Welle an Wellenkette

Oberschwingungen und Moden

Erlaubte Frequenzen einer eingespannten Saite (feste Enden!) ergeben die *Schwingungsmoden*:



$L = \frac{\lambda}{2}$

$L = \lambda$

$\vdots$

$n = 1 \rightarrow$ Fundamentale Mode; Grund-Schwingung

$n = 2 \rightarrow$ 1. Oberschwingung

$n = 3 \rightarrow$ 2. — " —

Allgemeine Bedingung:

$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$

$\Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = n \cdot \frac{c}{2L}$

Experiment: Seilwellen – Grund und Oberschwingungen

Verständnisfrage Moden

https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Guitard_Epiphone_03.jpg

Ein Saiteninstrument spielt ein *a‘* (440 Hz), wenn man es zupft.

Wenn man den Finger genau auf die Mitte der Saite legt und wieder zupft, welchen Ton hört man nun?

A) Eine Oktave höher (880 Hz) ✓

B) Eine Oktave tiefer (220 Hz)

C) Den gleichen Ton (440 Hz)

D) Keinen der oben genannten Töne.

$L = \frac{\lambda}{2}$

L

$L = \lambda$

$c = \lambda \cdot f$

$f = \frac{c}{\lambda}$

Schwebungen

Interferenz von Wellen mit ähnlicher (aber nicht identischer) Frequenz:

Ignoriere x; Erzeuge Wellen mit ω_1 und ω_2

$$y_{Gesamt}(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t)$$
$$= 2A\cos\left(\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right)$$

mit $\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$ und $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$

$$\Rightarrow y_{Gesamt} = \underbrace{2A\cos(\omega' t)}_{\text{zeitabhängige Amplitude}}\sin(\omega t)$$

mit Schwebungsfrequenz ω'

Zur Erinnerung:
$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Experiment: Schwebung mit Orgelpfeifen

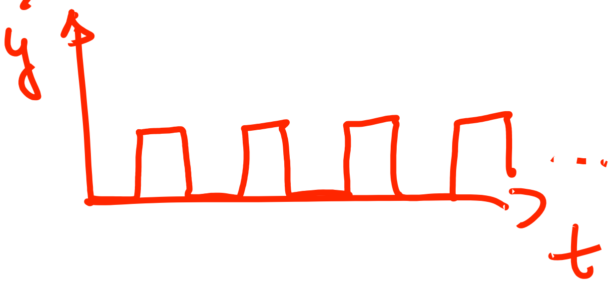
Fourieranalyse

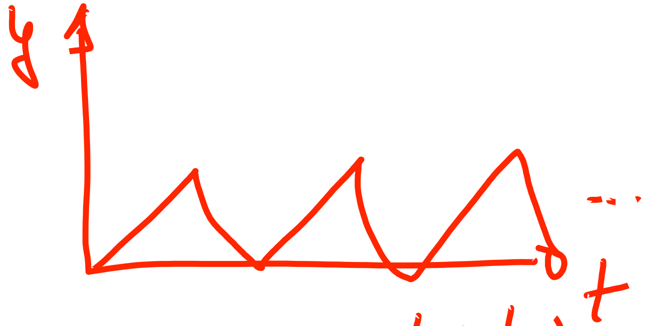
Analysiere Schwingungen, die aus verschiedenen Frequenzen zusammengesetzt sind: ***y(t)* beliebiger Form, das sich nach Periode *T* wiederholt**

https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier

Joseph Fourier (1768-1830)

z.B.





$$y(t) = y_0 + y_1 \sin(\omega t + \phi_1) + y_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_n \sin(n \cdot \omega \cdot t + \phi_n)$$

y_n, ϕ_n sind zu bestimmen

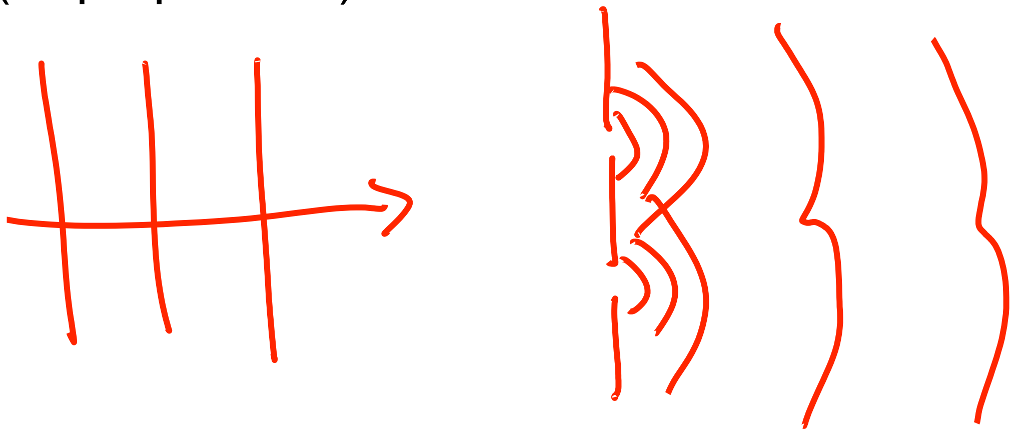
Experiment: Fourieranalyse mit Lautsprecher

Interferenz von Wellen

https://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

Christiaan Huygens (1629-1695)

Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer neuen Welle, einer **Elementarwelle**, betrachtet werden.
Die Elementarwellen sind kugelförmig (kreisförmig in 2D) und die neue Lage der Wellenfront ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) sämtlicher Elementarwellen.



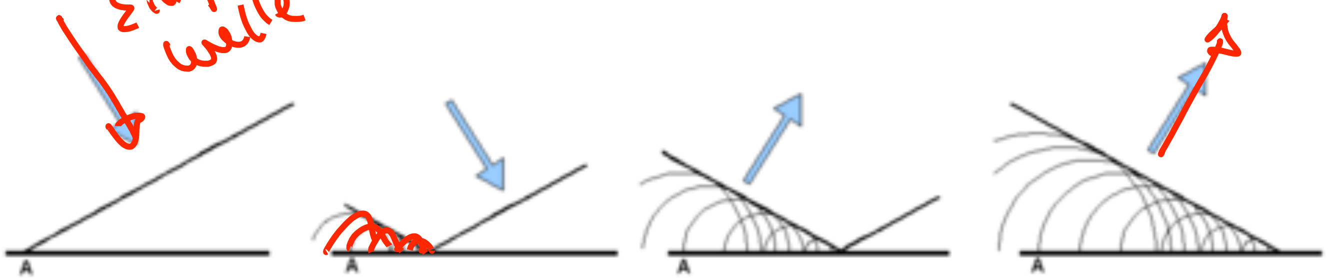
Experiment: Wellenwanne – Elementarwellen

Interferenz von Wellen

Reflexion à la Huygens

Einfallende Welle

Reflektierte Welle

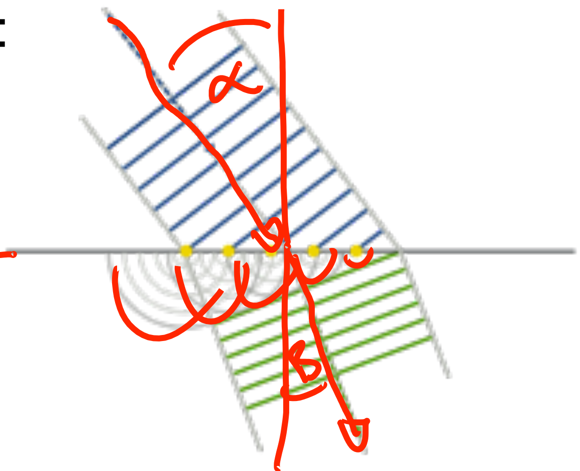


https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches_Prinzip

Brechung (zwei Medien mit Geschwindigkeiten c_1 und c_2) à la Huygens:

c_1

c_2



https://de.wikipedia.org/wiki/Huygenssches_Prinzip

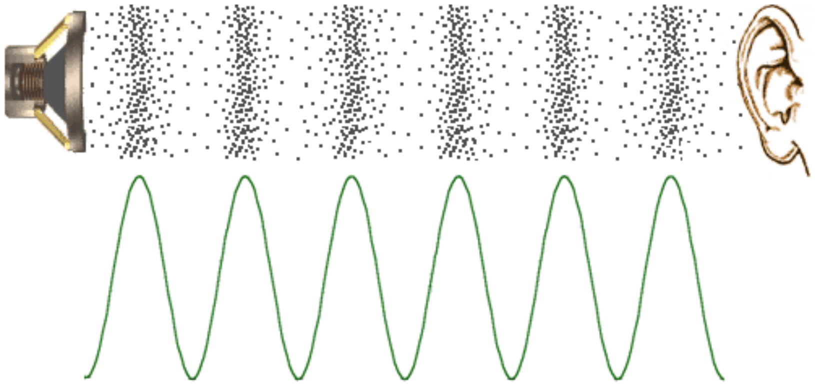
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

(Snellius)

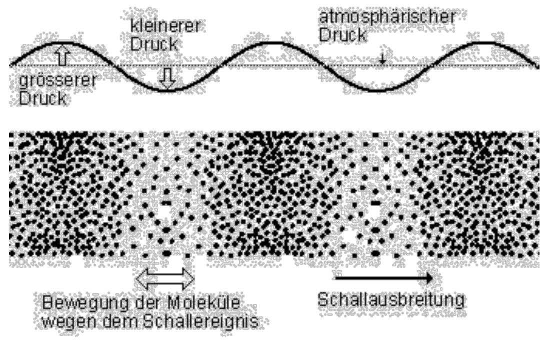
Experiment: Wellenwanne – Spalt und Spiegel

Schallwellen

Longitudinale Wellen; Druckschwankungen in Gasen & Flüssigkeiten:



https://scienceconceptions.wikispaces.com/Do+the+Wave



www.kemt.fei.tuke.sk/Predmety/KEMT320_EA/_web/Online_Course_on_Acoustics

Schallgeschwindigkeit

$$c_{schall} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Kompressionsmodul

Dichte

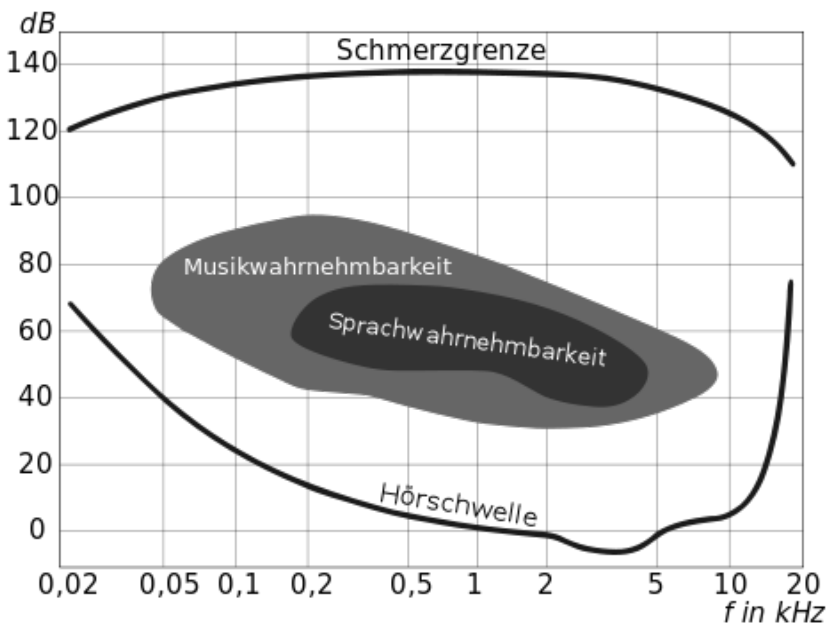
In Luft: $c_{schall} \approx 340 \frac{m}{s}$

Menschlicher Hörbereich

Dezibel

Schallpegel $\hat{=}$ $10\,dB \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$$I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$$



https://de.wikipedia.org/wiki/Hörfläche

Experiment: Hörschwelle bei verschiedenen Frequenzen

Zusammenfassung: Wellen

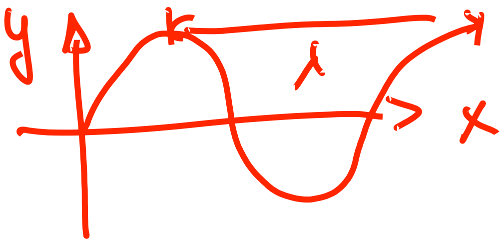
Wellen: Sich räumlich und zeitlich ausbreitende Schwingungen

Allgemein: $$y(x,t) = f(x \pm ct)$$

Wichtiger Spezialfall: Harmonische Wellen

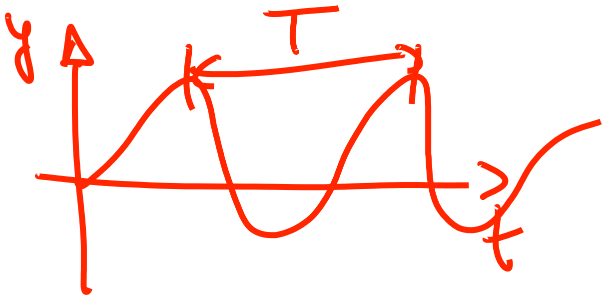
$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

Wellenlänge: λ



Wellenzahl: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Periode: T



Kreisfrequenz: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Frequenz: $f = \dfrac{1}{T}$

Phasengeschwindigkeit: $c = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f$

Zusammenfassung: Wellengleichung und Superposition

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Auslenkung: $y(x,t)$
Phasengeschwindigkeit: c

Superpositionsprinzip:
Wellen können sich überlagern und die resultierende Welle ist die Summe der Einzelwellen (so lange das Medium linear reagiert). Die Summe von Lösungen der Wellengleichung ist wieder eine Lösung der Wellengleichung.

- Wellen mit Phasenverschiebung:
  Konstruktive / destruktive Interferenz
- Gegenläufige Wellen: **Stehende Wellen**
- Ähnliche Frequenzen: **Schwebungen**
- Zerlegung von Wellen in verschiedene Frequenzkomponenten: **Fourier- Analyse**
- Zerlegung von Wellen in Elementarwellen:
  Huygenssches Prinzip