Abschlussklausur

Vorname: Muster **Nachname:** Lösung

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: Chemie ☐ Biologie ☐ Lehramt ☐ Sonstiges: ____________

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, Wörterbuch
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		20
3		20
4		15
5		15
Σ		100

Einige nützliche Konstanten
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$
Erdmasse $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Erdradius $R_E \approx 6400$ km
Dichte von Luft bei Normaldruck und T = 20°C: 1,2 kg/m³
Dichte von Wasser bei Normaldruck und T = 20°C: 1000 kg/m³
Viskosität von Wasser bei Normaldruck und T = 20°C: 0,001 Pa·s = 0,001 kg/(m·s)
Normaldruck: 1 atm = 1013 mbar = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa
Avogadro-Konstante: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante: $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J/K
Gas-Konstante: $R = 8{,}314$ J/(K · mol)
1 cal (Kalorie) = 4,1868 J

Name: ______________________________

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, bzw. kurze Rechnung, bzw. einfache Skizze) auf die folgenden Fragen.

a) **Zwei Massen.** Zwei Massen $m_1 = m$ und $m_2 = 2 \cdot m$ bewegen sich jeweils entlang der +x-Achse mit gleichem Impuls. Welche der beiden Massen hat die größere kinetische Energie? Wie viel größer?

m_1 hat größere kinetische Energie, nämlich $2 \cdot E_{kin,2}$

Rechnung: $p_1 = m_1 v_1 = m v_1 = p_2 = m_2 v_2 = 2m v_2 \Rightarrow v_1 = 2 v_2$

V6, F13
V5, F23

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2$$
$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 2m \left(\frac{1}{2} v_1\right)^2 = \frac{1}{4} m v_1^2$$
$$E_{kin,1} = 2 E_{kin,2}$$

b) **Messfehler.** Mit einer neuen Methode können Sie die Masse von einzelnen Zellen messen. Nachdem Sie 20 Zellen gemessen haben, ist der Mittelwert der Messungen 2,3 ng und die Standardabweichung 1,0 ng. Wie viele Zellen müssen Sie insgesamt in etwa messen, damit Sie einen Stichprobenfehler (*standard error of the mean*) von 0,1 ng erreichen?

$$\sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \Rightarrow \sqrt{N} = \frac{\sigma}{\sigma_{SEM}} = \frac{1{,}0\ \text{ng}}{0{,}1\ \text{ng}} = 10$$

V1, F32

$$\Rightarrow \underline{\underline{N = 100}}$$

c) **Zusammenstoß auf Eis.** Ein Lieferwagen ($M = 7500$ kg) fährt mit 50 km/h auf einer eisglatten (annähernd reibungsfreien) Fahrbahn auf ein stehendes Auto ($m = 1000$ kg). Der Stoß sei vollständig inelastisch. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach dem Unfall?

Impulserhaltung:

$$M v = (m+M) u$$

$$\Rightarrow u = \frac{M v}{(m+M)} = \frac{7500\,\text{kg}}{8500\,\text{kg}} 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 44 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$= 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

V6, F17

Name: ______________________________

d) **Edelgase I.** Jeweils ein Mol der Edelgase Helium, Neon und Argon befinden sich in einem Zylinder bei Raumtemperatur ($T = 300$ K). Edelgase verhalten sich in guter Näherung wie ideale Gase und es gilt für die Massen $m_{He} < m_{Ne} < m_{Ar}$. Ordnen Sie die Edelgase nach der mittleren kinetischen Energie ihrer Atome.

Alle gleich, d.h. He = Ne = Ar

Es gilt
$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ und T ist für alle gleich!

$\boxed{\text{V13, F10}}$

e) **Edelgase II.** Ordnen Sie die Edelgase aus der letzten Teilaufgabe nach der mittleren quadratischen Geschwindigkeit ($\langle v^2 \rangle$) ihrer Atome.

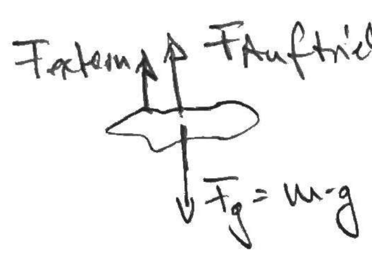
He > Ne > Ar

Es gilt: $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ d.h. kleinere Masse
$\Rightarrow$ größeres $\langle v^2 \rangle$

$\boxed{\text{V13, F10}}$

f) **Bergung einer Statue.** Eine 70 kg schwere antike Statue soll vom Meeresgrund gehoben werden. Das Volumen der Statue beträgt $3{,}0 \cdot 10^4$ cm^3. Wie groß ist die Kraft, die nötig ist, sie unter Wasser anzuheben?

$F_{extern} = F_g - F_{Auftrieb}$



$F_{Auftrieb} = V \cdot \rho_{H_2O} \cdot g$

$F_g = 70\,kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = 686\,N$

$F_{Auftrieb} = \frac{3 \cdot 10^4\, cm^3}{10^6 \frac{cm^3}{m^3}} \cdot 1000 \frac{kg}{m^3}\, 9{,}8 \frac{m}{s^2}$

$= 294\,N$

$\boxed{\text{V9, F5}}$

$\Rightarrow F_{extern} = 686\,N - 294\,N = 392\,N \approx \underline{\underline{390\,N}}$

Name: ______________________________

g) **Temperaturskalen.** Argon schmilzt bei 83,8 K. Geben Sie den Schmelzpunkt von Argon in °C und °F an.

$$T_{°C} = -273{,}15\,°C + T_K = -273{,}15\,°C + 83{,}8\,K = \underline{\underline{-189{,}35\,°C}}$$

$$T_{°F} = \left(\frac{9}{5}\frac{T_C}{°C} + 32\right)°F = \underline{\underline{-308{,}83\,°F}}$$

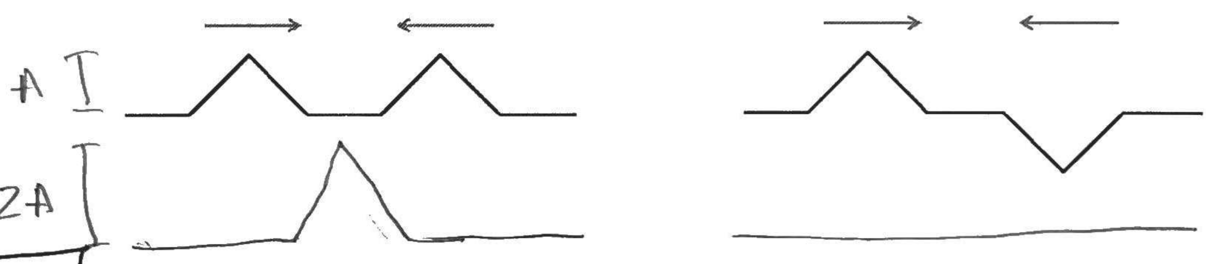
V13, F9 & F7

h) **Rollende Zylinder.** Ein Vollzylinder mit Masse $3m$ und eine Hohlzylinder mit Masse m (beide mit Radius R) werden gleichzeitig aus der Ruhe losgelassen und rollen eine schiefe Ebene hinab. Welcher Zylinder kommt zuerst unten an? Warum?

Der Vollzylinder kommt zuerst an.
Beim Vollzylinder wird weniger Energie in Rotationsenergie umgewandelt als beim Hohlzylinder.
Die Masse spielt dabei keine Rolle!

V7, F17 & 18

i) **Superposition.** Zwei sägezahnförmige Auslenkungen eines Seiles (das als linear-elastisch angenommen werden kann) laufen auf verschiedene Arten aufeinander zu (siehe Abbildungen). Zeichnen Sie für die Situationen links und rechts jeweils schematisch die Gesamtauslenkung zum Zeitpunkt, an dem die Mittelpunkte der Auslenkungen durcheinander hindurchlaufen.



V13, F5

j) Ein würfelförmiger Wassertank hat eine Kantenlänge von $L = 1{,}00 \pm 0{,}01$ m. Was ist (nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung) die Unsicherheit in seinem Volumen $V = L^3$?

$$\sigma_V = \left(\left(\frac{\partial}{\partial L}(L^3)\right)^2 \sigma_L^2\right)^{1/2} = \left((3L^2)^2 \cdot \sigma_L^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(3 \cdot (1{,}00\,m)^2 \cdot 0{,}01\,m\right) = \underline{\underline{0{,}03\,m^3}}$$

V2, F12

Name: ____________________

Aufgabe 2

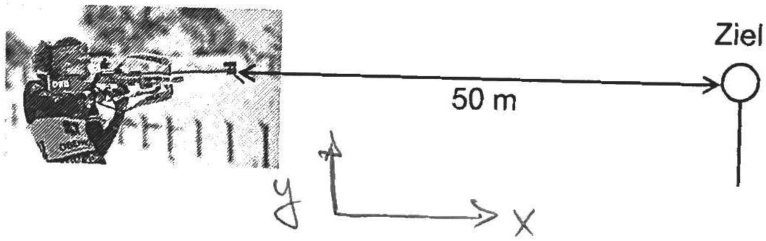
Biathlon (20 Punkte). *Laura Dahlmeier* gewann bei den Olympischen Winterspielen 2018 im Biathlon Sprint die erste Goldmedaille für das deutsche Team. Die (mit Ausrüstung) insgesamt 60 kg schwere Athletin absolvierte den 7,5 km langen Kurs dabei in 21 min und 6,2 s.

a) Was war ihre Durchschnittsgeschwindigkeit für das Rennen, in m/s und km/h?

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7{,}5\,km \cdot 1000\,\frac{m}{km}}{1260s + 6{,}2s} = 5{,}92\,\frac{m}{s} = 21{,}3\,\frac{km}{h}$$

$\boxed{V2, F25}$

b) Beim Schießen im Stand beim Biathlon ist das Ziel 50 m entfernt und es wird mit einem Kleinkaliber-Gewehr geschossen, das eine Mündungsgeschwindigkeit der Kugel (v_0) von 350 m/s hat. Wenn wir davon ausgehen, dass sich das Gewehr auf gleicher Höhe wie das Ziel befindet und die Athletin genau horizontal schießt, wie weit fällt die Kugel im Schwerfeld der Erde, bevor sie das Ziel erreicht? Sie können den Luftwiderstand hier vernachlässigen.



In x: $x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{50\,m}{350\,\frac{m}{s}} = 0{,}143\,s$

In y: $y = -\frac{1}{2} g t^2 = -0{,}10\,m = -10\,cm$

d.h. die Kugel fällt 10cm.

$\boxed{V3, F10}$

Name: ______________________________

c) Jetzt betrachten wir die Situation, dass *Laura Dahlmeier* auf ebener Strecke mit 25 km/h Ski fährt. Wie groß ist die Reibungskraft zwischen Skiern und Schnee? Der Gleitreibungskoeffizient von Skiern mit Schnee beträgt $\mu_G = 0{,}05$.

$$F_{Gleit} = \mu_{Gleit} \cdot F_N = 0{,}05 \cdot 60\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 29{,}4\,N$$

$\boxed{V4, F16}$

d) Unter den Bedingungen der letzten Teilaufgabe, was ist die Reibungskraft durch Luftreibung? Die Querschnittsfläche sei 0,8 m^2 und der C_w-Wert 0,8. Sie können die Temperatur-Abhängigkeit der Dichte von Luft vernachlässigen.

$$F_{Reibung} = \frac{1}{2} \rho A c_w v^2$$

$$= \frac{1}{2}\, 1{,}2\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}8\,m^2 \cdot 0{,}8 \left(6{,}94\,\frac{m}{s}\right)^2$$

$$= 18{,}5\,N$$

$\boxed{V5, F5}$

e) Ab welcher Geschwindigkeit v_{krit} ist die Reibungskraft durch Luftwiderstand größer als die Reibungskraft auf die Skier?

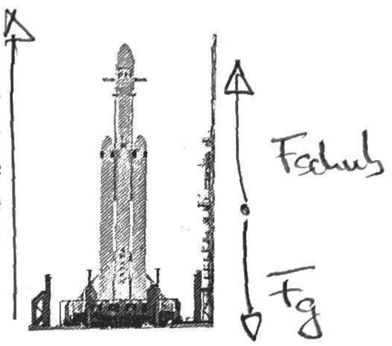
$$\mu_{Gleit}\, m \cdot g = \frac{1}{2} \rho A c_w v_{krit}^2$$

$$\Rightarrow v_{krit}^2 = \frac{\mu_{Gleit}\, m g}{\frac{1}{2} \rho A c_w} = \frac{29{,}4\,\frac{kg\,m}{s^2}}{\frac{1}{2}\, 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}\, 0{,}8\,m^2\, 0{,}8} = 76{,}6\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow v_{krit} = 8{,}75\,\frac{m}{s} = 31{,}5\,\frac{km}{h}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3



SpaceX Falcon Heavy (20 Punkte). Am 6. Februar 2018 hatte die Rakete *Falcon Heavy* (eine Weiterentwicklung der *Falcon 9* aus dem 7. Aufgabenblatt) der Firma *SpaceX* ihren Jungfernflug. Die Gesamtmasse der Rakete beträgt $M = 1{,}42 \cdot 10^6$ kg beim Start von der Erdoberfläche. Die Rakete wird von insgesamt 27 Raketentriebwerken angetrieben, die jeweils einen maximalen Schub von 820 kN erzeugen können.

a) Was ist die Beschleunigung der Rakete, wenn beim Start alle Raketentriebwerke mit maximalen Schub gezündet werden, so dass die Rakete direkt nach oben abhebt? Berücksichtigen Sie die Schwerkraft.

$$F_{gesamt} = F_{schub} - F_g = 27 \cdot 820 \cdot 10^3 \, N - 1{,}42 \cdot 10^6 \, kg \; 9{,}8 \frac{m}{s^2}$$

$$= 2{,}21 \cdot 10^7 N - 1{,}39 \cdot 10^7 N = 0{,}82 \cdot 10^7 N$$

$$a = \frac{F_{gesamt}}{m} = \frac{0{,}82 \cdot 10^7 \frac{kg\,m}{s^2}}{1{,}42 \cdot 10^6 \, kg} = 5{,}77 \frac{m}{s^2}$$

$$\approx 5{,}8 \frac{m}{s^2}$$

V3, F18

b) Wie weit fliegt die Rakete in der 1 s nach dem Start, wenn wir Schub und Schwerkraft in dieser Zeit als konstant annehmen und den Luftwiderstand vernachlässigen?

$$z = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + z_0 \quad \text{mit} \quad v_0, z_0 = 0$$

$$= \frac{1}{2} \, 5{,}77 \frac{m}{s^2} (1{,}0 \, s)^2 = \underline{\underline{2{,}89 \, m}} \approx \underline{\underline{2{,}9 m}}$$

V3, F6

Name: ______________________________

c) Die Nutzlast (*pay load*) der Rakete beträgt 63 000 kg für den Transport in einen *low earth orbit* 200 km über der Erdoberfläche. Welche Energie ist nötig, um die Nutzlast von der Erdoberfläche in den *low earth orbit* zu bringen, wenn wir nur die Arbeit gegen die Schwerkraft der Erde berücksichtigen?

$$E_{pot} = G \frac{M_{Erde} \, m_{Nutz}}{r}$$

$$\Delta E_{pot} = G \, M_{Erde} \cdot m_{Nutz} \left(\frac{1}{R_{Erde}} - \frac{1}{R_{Erde} + 200\,km} \right)$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \; 5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg \; 63000\,kg \left(\frac{1}{6400 \cdot 10^3\,m} - \frac{1}{6600 \cdot 10^3\,m} \right)$$

$\boxed{V6, F10}$

$$= \underline{1{,}19 \cdot 10^{11}\,J}$$

Bemerkung: Man kann hier auch mit $\Delta E_{pot} = m \cdot g \Delta h = 1{,}23 \cdot 10^{11}\,J$ rechnen.

d) Wenn wir nur die Arbeit gegen die Schwerkraft der Erde berücksichtigen und davon ausgehen, dass die in der letzten Teilaufgabe ausgerechnete Energie zur Verfügung steht, welche Nutzlast kann die *Falcon Heavy* in einen geostationären Orbit (36 000 km über der Erdoberfläche) transportieren?

$$\Delta E_{pot} = G \, M_{Erde} \, m_{Nutz} \cdot \left(\frac{1}{R_{Erde}} - \frac{1}{R_{Erde} + 36000\,km} \right) = \underbrace{\Delta E_{pot,c}}_{\text{aus der letzten Aufgabe}}$$

$\boxed{V6, F10}$

$$\Rightarrow m_{Nutz} = \frac{\Delta E_{pot,c}}{G \, M_{Erde} \left(\frac{1}{R_{Erde}} - \frac{1}{R_{Erde} + 36000\,km} \right)}$$

$$= \frac{1{,}19 \cdot 10^{11}\,J}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \; 5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg \left(\frac{1}{6400 \cdot 10^3\,m} - \frac{1}{42400 \cdot 10^3\,m} \right)} = \underline{\underline{2250\,kg}}$$

Mit dem $m \cdot g \Delta h$ Ergebnis kommt man auf $2{,}33 \cdot 10^3\,kg$

e) Warum spielt es für die Antworten der letzten beiden Teilaufgaben keine Rolle, ob man die genaue Trajektorie (d.h. Flugroute) der Rakete kennt?

Die Gravitation ist eine <u>konservative</u> Kraft, so dass die verrichtete Arbeit Weg-unabhängig ist.

$\boxed{V5, F24}$

Name: ____________________

Aufgabe 4

Trinkfountaine (15 Punkte). Aus einer Trinkwasserfountaine spritzt das Wasser 20 cm hoch direkt nach oben aus einer Düse mit einem Durchmesser von 0,6 cm. Am Fuß der Fountaine, 1,1 m unterhalb der Düse, ist eine Pumpe, die das Wasser aus einem Reservoir über ein Rohr mit einem Durchmesser von 1,2 cm zur Düse drückt.

a) Welchen Druck (zusätzlich zum Atmosphärendruck) muss die Pumpe im Reservoir bereit stellen, wenn wir die Viskosität des Fluids vernachlässigen?

Im Reservoir: oben an der Fountaine:

$\boxed{h=0,\ v=0}$ $\qquad p = \rho \cdot g \cdot h \qquad$ $\boxed{p=0,\ v=0}$

$$\Rightarrow p = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}3\,m$$

$\boxed{\text{V}9,7\text{A}2}$

$$= 12740\ Pa$$

Bemerkung: Alternativ gab es ebenfalls volle Punktzahl für den Druck unten im Rohr, bei dem noch ein $\frac{1}{2}\rho v^2$ Term berücksichtigt wird.

b) Wie ändert sich die Antwort, wenn wir die Viskosität des Fluides in der Leitung (nicht aber in der Düse) berücksichtigen? Die Strömung im Rohr sei durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben und die Volumenflussrate 1 L/min.

Druckabfall im Rohr:

$$\Delta p = \left(\frac{dV}{dt}\right)\frac{8\eta l}{\pi R^4} = \left(10^{-3}\,\frac{m^3}{60s}\right) \cdot \frac{8 \cdot 0{,}001\,\frac{kg}{m \cdot s} \cdot 1{,}1\,m}{\pi \left(\frac{0{,}012\,m}{2}\right)^4}$$

$\boxed{\text{V}10,7\text{B}}$

$$= 36\ Pa$$

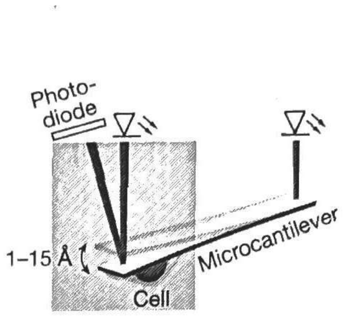
$$\Rightarrow p_{Reservoir} = p_{Teil\,a} + 36\ Pa = 12776\ Pa$$

d.h. die Änderung ist kaum signifikant.

Name: __________

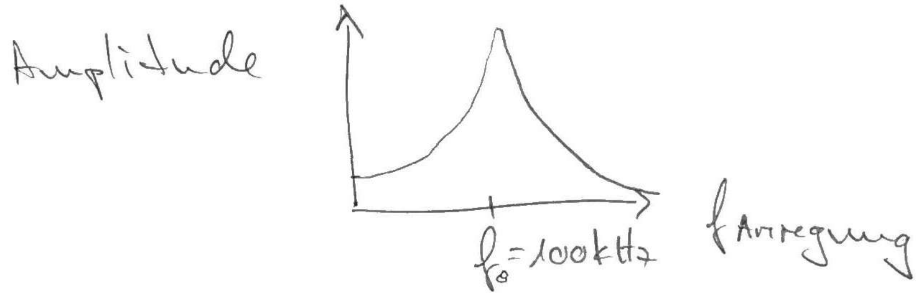
Aufgabe 5

Die Masse einer Zelle (15 Punkte). Der Biophysiker Daniel J. Müller und sein Team haben eine Methode entwickelt, die Masse von einzelnen lebenden Zellen mit ms-Zeitauflösung und pg-Genauigkeit zu messen (Martínez-Martín *et al.*, *Nature*, 2017; siehe Abbildung rechts). Dabei wird ein Microcantilever durch einen blauen Laser (rechts in der Graphik) zu Schwingungen angeregt. Die Schwingungen werden durch einen roten Laserstrahl und eine Photodiode (links oben in der Graphik) gemessen.



Die zu messende Zelle ("Cell") befindet sich an der Spitze des Microcantilever. Die Messung beruht auf dem Prinzip des getriebenen und gedämpften harmonischen Oszillators. Der Microcantilever ist effektiv eine harmonische Feder mit Federkonstante k. Die effektive Masse m^* setzt sich aus der Masse des Microcantilever m_L und der Masse der Zelle m_Z zusammen: $m^* = m_L + m_Z$. Die Eigenfrequenz des Systems ist (wie auch in der Vorlesung) $f = \sqrt{k/m^*}/(2\pi)$. Die Eigenfrequenz des Microcantilever ohne Zelle (d.h. $m^* = m_L$) ist $f_0 = 100$ kHz.

a) Zeichnen Sie schematisch, was Sie für die Amplitude der angeregten Schwingung (auf der y-Achse) des Microcantilever ohne Zelle als Funktion der anregenden Frequenz (auf der x-Achse) erwarten würden. Markieren Sie dabei den Punkt $f = 100$ kHz.



$\boxed{\text{V11, F8}}$

b) Jetzt wird eine Zelle am Microcantilever befestigt. Die neue Eigenfrequenz sei f_Z. Leiten Sie einen Ausdruck für die Masse der Zelle, als Funktion von f_0, f_Z und k her.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m^*}} \qquad \text{Ohne Zelle: } f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_L}}$$

$$\text{Mit Zelle } f_Z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_L + m_Z}}$$

$$(2\pi f_0)^2 = \frac{k}{m_L} \Rightarrow m_L = \frac{k}{(2\pi f_0)^2}$$

$$(2\pi f_Z)^2 = \frac{k}{m_L + m_Z} \Rightarrow m_L + m_Z = \frac{k}{(2\pi f_Z)^2}$$

$$m_Z = m_Z + m_L - m_L = \frac{k}{(2\pi)^2 f_Z^2} - \frac{k}{(2\pi)^2 f_0^2} = \frac{k}{4\pi^2}\left(\frac{1}{f_Z^2} - \frac{1}{f_0^2}\right)$$

Name: ____________________

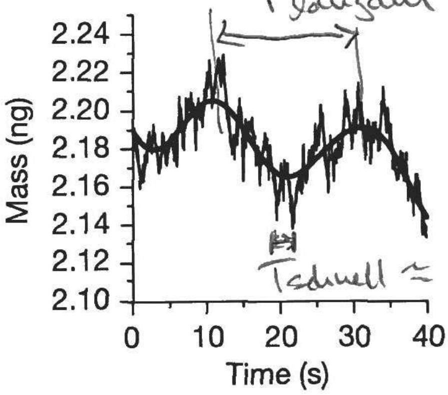
c) Was ist die Masse der Zelle, wenn die neue Eigenfrequenz $f_Z = 95$ kHz und die Federkonstante $k = 8{,}0$ kN/m sind?

$$m_Z = \frac{8\cdot 10^3 \,\frac{N}{m}}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\left(95\cdot 10^3 \frac{1}{s}\right)^2} - \frac{1}{\left(100\cdot 10^3 \frac{1}{s}\right)^2}\right)$$

$$= 2{,}19 \cdot 10^{-9}\,\text{kg} = \underline{\underline{2{,}19\,\mu g}} \approx \underline{\underline{2{,}2\,\mu g}}$$

d) Aus Messungen der Masse von Zellen als Funktion der Zeit wurden periodische Fluktuationen der Zellmasse identifiziert. Die Fluktuationen (dünne schwarze Linie in der Abbildung unten) haben dabei eine schnelle und eine langsame (siehe die dicke scharze Linie in der Abbildung unten) Komponente. Schätzen Sie die Periodendauern der schnellen und der langsamen Komponenten aus den Daten ab.

$T_{langsam} \approx \underline{\underline{20 s}}$



$T_{schnell} \approx \underline{\underline{2 s}}$