Wiederholungsklausur

Vorname: Muster **Nachname:** Lösung

Matrikelnummer: 1234567890

Studiengang: Chemie ☐ Biologie ☐ Lehramt ☐ Sonstiges: ____________

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, Wörterbuch
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		20
3		20
4		15
5		15
Σ		100

Einige nützliche Konstanten

Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Erdmasse $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Erdradius $R_E \approx 6400$ km
Dichte von Luft bei Normaldruck und T = 20°C: 1,2 kg/m^3
Dichte von Wasser bei Normaldruck und T = 20°C: 1000 kg/m^3
Normaldruck: 1 atm = 1013 mbar = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa
Avogadro-Konstante: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann-Konstante: $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J/K
Gas-Konstante: $R = 8{,}314$ J/(K · mol)
1 cal (Kalorie) = 4,1868 J

Name: ______________________________

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, bzw. kurze Rechnung, bzw. einfache Skizze) auf die folgenden Fragen.

a) Die folgenden Gleichungen geben die Position $x(t)$ eines Teilchens in drei verschiedenen Situationen an. In welchen Fällen handelt es sich um **gleichmässig beschleunigte Bewegung**?

(1) $x(t) = -5t^3 + 3t^2 + 8$
(2) $x(t) = 2/t^2 - 4/t$
(3) $x(t) = 5t^2 - 3$

Nur (3).

Erklärung: Gleichmässig beschleunigte Bewegung hat die Form $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

(3) hat diese Form mit $a = 10$, $v_0 = 0$, $x_0 = -3$

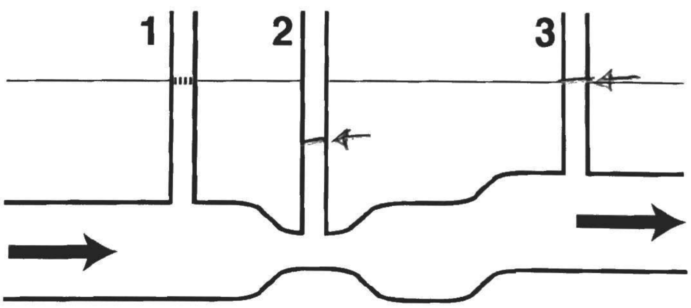
b) **Volumenausdehnung.** Sie haben bei 20 °C im Labor ein 100 ml großes Becherglas randvoll mit Ethanol gefüllt. Jetzt scheint die Sonne und das Labor wärmt sich auf 40 °C auf. Wie viel Ethanol läuft über? Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient von Ethanol ist β = 1,40 $\cdot 10^{-3}$ /°C. Sie können Randeffekte und die thermische Ausdehnung des Gefäßes vernachlässigen.

$$\Delta V = \beta \cdot V \cdot \Delta T = \frac{1{,}40 \cdot 10^{-3}}{°C} \cdot 100\,ml \cdot (40°C - 20°C)$$

$$= \frac{1{,}4 \cdot 10^{-3}}{°C} \cdot 100\,ml \cdot 20°C = 2{,}8\,ml$$

$\Rightarrow$ 2,8 ml laufen über.

c) **Strömung im Rohr.** Die Skizze unten zeigt ein Rohr, in dem ein inkompressibles und reibungsfreies Fluid von links nach rechts strömt und mit dem drei Steigrohre (1, 2 und 3) verbunden sind. Die gestrichelte Linie markiert die Höhe des Fluides in Steigrohr 1. Zeichnen Sie (schematisch) die Höhe des Fluides in den Steigrohren 2 und 3 ein.



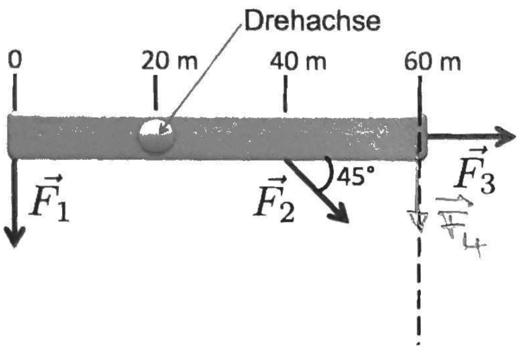
Name: ____________________

d) **Interferenz von Wellen.** Zwei Wellen gleicher Amplitude und Wellenlänge interferieren in drei verschiedenen Situationen und erzeugen dabei resultierende Wellen, die durch die unten angegebenden Gleichungen beschrieben werden. Geben Sie für jede der resultierenden Wellen (1), (2) und (3) an, ob die beiden ursprünglichen Wellen sich (a) in positive x-Richtung, (b) in negative x-Richtung, oder (c) in entgegengesetzte Richtungen ausgebreitet haben?

(1) $y_{Ges}(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$
(2) $y_{Ges}(x,t) = 4\sin(5x) \cdot \cos(4t)$
(3) $y_{Ges}(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$

(1) → (a) (in positive x-Richtung)
(2) → (c) (stehende Welle, aus gegenläufigen Wellen)
(3) → (b) (in negativer x-Richtung)

e) **Drehmomente.** Die Skizze unten zeigt einen Balken mit Längenangaben, der sich um den markierten Punkt frei drehen kann, d.h. die Drehachse steht senkrecht auf der Papierebene und befindet sich bei 20 m. Für die Beträge der eingezeichneten Kräfte gilt $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ N. Ordnen Sie die Kräfte nach dem Drehmoment, das sie bezüglich der eingezeichneten Drehachse bewirken, beginnend mit dem größten Wert.



1 > 2 > 3

Erklärung:

$|\vec{T}_1| = |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = 400$ N·m

$|\vec{T}_2| = |\vec{r}_2 \times \vec{F}_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 400$ Nm $= 283$ N·m

$|\vec{T}_3| = 0$

f) **Hebel.** Wir betrachten wieder den Balken aus der letzten Teilaufgabe, auf den die drei Kräfte $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, und $\vec{F_3}$ wirken. Was für eine Kraft muss entlang der gestrichelten Linie (bei "60 m") wirken (Betrag und Richtung), damit der sich anfänglich in Ruhe befindliche Balken nicht dreht?

Damit sich Balken nicht dreht: $\sum_i \vec{T}_i = 0$

Definiere Drehung im Uhrzeigersinn als positiv.

$\vec{T}_1 = -400$ N·m

$\vec{T}_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} 400$ N·m $= 283$ Nm

$\vec{T}_3 = 0$

$\vec{T}_4 =$ **40 m** $\cdot |\vec{F}_4|$

(siehe Skizze)

$\Rightarrow 0 = -400$ Nm $+ 283$ N·m $+$ **40 m** $|F_4|$

$\Rightarrow |F_4| = \frac{117 \text{ N·m}}{\textbf{40 m}} =$ **2,9 N**

Die Richtung entlang der gestrichelten Linie nach unten.

Name: ____________________

g) *Dr. Stap* misst, dass sein Raketenschlitten eine Teststrecke von 30,0 m ± 0,1 m in 0,80 s ± 0,01 s durchfährt. Was ist die mittlere Geschwindigkeit für diesen Abschnitt? Was ist der Messfehler unter der Annahme Gaußscher Fehlerfortpflanzung?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30{,}0\,m}{0{,}80\,s} = 37{,}5\,\frac{m}{s}$$

Meßfehler: $$\sigma_{\bar{v}} = \left(\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \Delta x} \sigma_{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \Delta t} \sigma_{\Delta t} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta t} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta x \cdot \sigma_{\Delta t}}{\Delta t^2} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Alternativ (einfacher!): Quadratische Addition der relativen Fehler.

$$= \left(\left(\frac{0{,}1\,m}{0{,}80\,s} \right)^2 + \left(\frac{30{,}0\,m \cdot 0{,}01\,s}{(0{,}80\,s)^2} \right)^2 \right)^{1/2} = \underline{0{,}49\,\frac{m}{s}}$$

h) Der kürzlich entdeckte, Erd-ähnliche **Exoplanet** *Trappist-1e* hat eine Masse die halb so groß ist wie die Erdmasse und den gleichen Radius wie die Erde. Was ist die lokale Schwerebeschleunigung g auf der Oberfläche des Exoplaneten *Trappist-1e*?

Allgemein: Für den Exoplanet: $R = R_{Erde}$

$M = \frac{1}{2} M_{Erde}$

$$g = \frac{GM}{R^2} \longrightarrow g_{Exoplanet} = \frac{1}{2} g_{Erde} = 4{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

i) **Temperaturskalen.** Ein amerikanischer Kollege hat Ihnen ein Laborprotokoll geschickt, in dem ein Substrat auf 400 °F aufgeheizt werden soll. Rechnen Sie diese Angabe in °C und K um.

$$T_C = \frac{5}{9}\left(\frac{T_F}{°F} - 32 \right) °C = \frac{5}{9}(400 - 32)\,°C = \underline{204\,°C}$$

$$T_K = \left(\frac{T_C}{°C} + 273{,}15 \right) K = \left(\frac{204\,°C}{°C} + 273{,}15 \right) K = \underline{478\,K}$$

j) **Stichprobenfehler.** Sie haben in einer Studie den systolischen Blutdruck einer Reihe von Probanden zu 120 ± 12 mmHg (Mittelwert ± Standardabweichung) bestimmt. Wie viele Probanden benötigen Sie in Ihrere Studie, damit der Stichprobenfehler ("standard error of the mean") maximal 1 mmHg ist?

$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \Rightarrow N = \left(\frac{\sigma}{SEM} \right)^2 = \left(\frac{12\,mmHg}{1\,mmHg} \right)^2 = 144$$

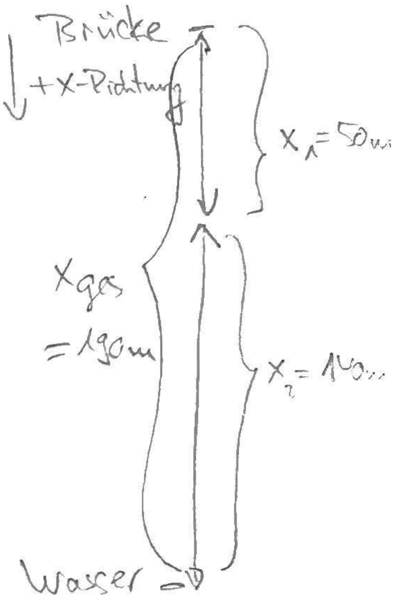
Man benötigt 144 Probanden.

Name: ______________________________

Aufgabe 2

Bungee-Jump (20 Punkte). Ein 80 kg schwerer Bungee-Jumper springt von der 190 m hohen Europabrücke. Wir wollen im folgenden Reibung und die Masse des Bungee-Seils vernachlässigen. Beim Absprung lässt sich der Bungee-Jumper einfach von der Brücke fallen, so dass seine Anfangsgeschwindigkeit Null ist.

a) Das (ungedehnte) Bungee-Seil habe eine Länge von 50 m, so dass der Springer zunächst 50 m frei fällt. Was ist seine Geschwindigkeit, wenn sich das Seil nach genau 50 m zu dehnen beginnt?



Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit

$x_0 = 0$; $v_0 = 0$; $a = g$

Allgemein: $v(t) = at + v_0$; $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \Rightarrow v = \sqrt{2x \cdot a}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2x_1 \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 50\,m \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$= \underline{\underline{31{,}3\,\frac{m}{s}}}$$

b) Wie muss die Federkonstante des Seils gewählt werden, damit der Springer genau über der Wasseroberfläche des unter der Brücke fließendes Flusses (190 m unterhalb der Brücke) zum Stillstand kommt? Das gedehnte Seil kann als Hooksche Feder genähert werden.

Betrachte Energieerhaltung

Oben auf der Brücke: $E_{kin} = 0$; $E_{Feder} = 0$; $E_{pot} = x_{ges} \cdot m \cdot g$

Unten über dem Wasser: $E_{kin} = 0$; $E_{pot} = 0$; $E_{Feder} = \frac{1}{2} k x_2^2$

mit $x_2 = x_{ges} - x_1 = 140\,m$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot x_{ges} = \frac{1}{2} k (x_{ges} - x_1)^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot x_{ges}}{(x_{ges} - x_1)^2} = \frac{2 \cdot 80\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 190\,m}{(140\,m)^2} = 15{,}2\,\frac{N}{m}$$

Name: ______________________________

c) Wie groß ist die Beschleunigung, die auf den Springer am tiefsten Punkt des Sprunges wirkt?

Es wirken F_{Feder} und F_g :

$$\Rightarrow F_{ges} = F_{Feder} + F_g = -kx_2 + m \cdot g$$

$$= -15{,}2 \frac{N}{m} \cdot 140\,m + 80\,kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = -1344\,N$$

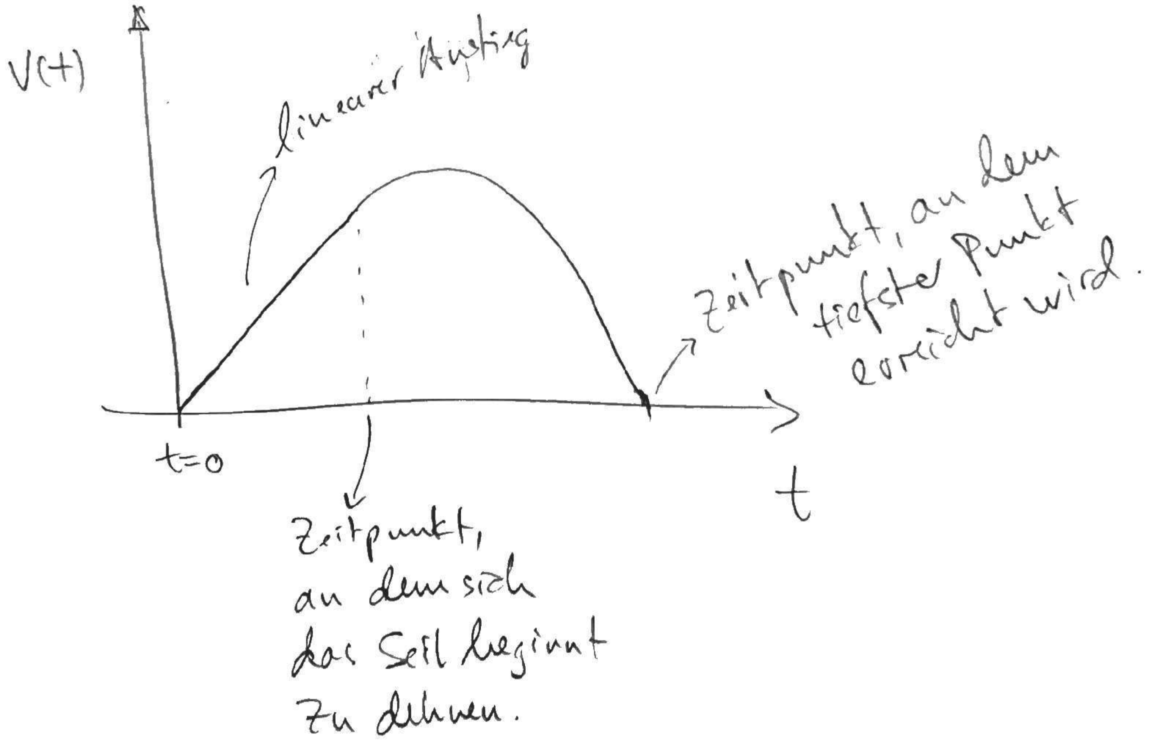
(d.h. Kraft wirkt nach oben)

Allgemein:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1344\,N}{80\,kg} = \underline{\underline{-16{,}8 \frac{m}{s^2}}}$$

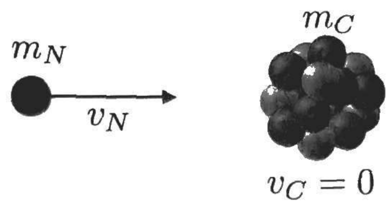
d) Zeichnen sie eine (qualitative) Skizze der Geschwindigkeit des Springers als Funktion der Zeit, vom Zeitpunkt des Absprungs bei $t = 0$ oben auf der Brücke bis zum Zeitpunkt, dass er den tiefsten Punkt erreicht.



Name: ____________________

Aufgabe 3

Neutronenstreuung (20 Punkte). Ein Neutron der Masse $m_N = 1$ Da (wobei Da oder "Dalton" die atomare Masseeinheit ist; 1 Da $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg) mit einer Geschwindigkeit $v_N = 2{,}2$ km/s stößt zentral und vollständig elastisch mit einem in Ruhe befindlichen Kohlenstoffkern der Masse $m_C = 12$ Da zusammen, siehe Abbildung. Die anfängliche Geschwindigkeit des Neutrons zeigt in die positive x-Richtung.



Geschwindigkeiten nach dem Stoß seien: u_N; u_C

a) Was ist die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) des Neutrons nach dem Stoß?

$$u_N = \frac{m_N - m_C}{m_N + m_C} \cdot v_N = \frac{1\,\text{Da} - 12\,\text{Da}}{(1+12)\,\text{Da}} \cdot 2{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}} = \underline{\underline{-1{,}86\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

D.h. die Geschwindigkeit nach dem Stoß für das Neutron ist $1{,}86\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ in $-x$-Richtung.

b) Was ist die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) des Kohlenstoffkerns nach dem Stoß?

$$u_C = \frac{2 m_N}{m_N + m_C}\, v_N = \frac{2 \cdot 1\,\text{Da}}{(1+12)\,\text{Da}} \cdot 2{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}} = \underline{\underline{0{,}34\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

D.h. die Geschwindigkeit des Kohlenstoffkerns ist nach dem Stoß $0{,}34\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ in $+x$-Richtung.

Name: ______________________________

c) Was ist die kinetische Energie des Neutrons vor ($E_{kin,N}$) und nach ($E'_{kin,N}$) dem Stoß?

$$E_{kin,N} = \frac{1}{2} m_N \cdot v_N^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot \left(2200\,\frac{m}{s}\right)^2$$
$$= 4{,}0 \cdot 10^{-21}\,J$$
$$E'_{kin,N} = \frac{1}{2} m_N \cdot u_N^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \left(1860\,\frac{m}{s}\right)^2$$
$$= 2{,}9 \cdot 10^{-21}\,J$$

d) Was ist die kinetischen Energie des Kohlenstoffkerns ($E'_{kin,C}$) nach dem Stoß?

$$E'_{kin,C} = \frac{1}{2} m_C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2}\, 12 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot \left(340\,\frac{m}{s}\right)^2$$
$$= 1{,}1 \cdot 10^{-21}\,J$$

e) Warum entspricht die kinetischen Energie des Kohlenstoffkerns nach dem Stoß ($E'_{kin,C}$) genau dem Energieverlust des Neutrons ($E_{kin,N} - E'_{kin,N}$)?

Da der Stoß vollständig elastisch ist, gilt Energieerhaltung!

$$\Rightarrow E_{kin,N} + E_{kin,C} = E'_{kin,N} + E'_{kin,C} \quad \text{mit } E_{kin,C} = 0$$
$$\Rightarrow E'_{kin,C} = E_{kin,N} - E'_{kin,N}$$

f) Wie ändern sich der relative Energieverlust ($E_{kin,N} - E'_{kin,N}$) / ($E_{kin,N}$), wenn das Neutron statt mit dem Kohlenstoffkern mit einem in Ruhe befindlichen Deuteriumkern (mit Masse m_D = 2 Da) zusammenstösst? Es reicht eine qualitative Antwort, ohne ausführliche Rechnung.

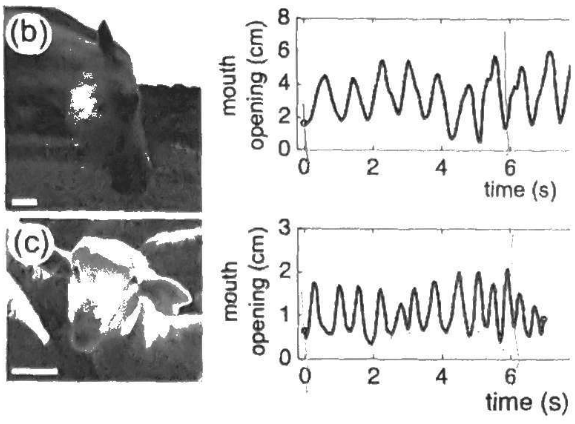
Da $u_N = \frac{m_N - m_D}{m_N + m_D} v_N = -\frac{1}{3} v_N$ deutlich kleiner ist, als im Fall des Stoßes mit dem Kohlenstoffkerns, ist auch die kinetische Energie nach dem Stoß kleiner und somit der relative Energieverlust größer.

Name: ______________________________

Aufgabe 4

Harmonisches Kauen (15 Punkte). Ein Forscherteam hat die Kaubewegungen von Landsäugetieren untersucht (Virot *et al.*, *Scientific Reports*, 2017). Die Abbildung unten zeigt experimentelle Daten zur Öffnung des Maules als Funktion der Zeit für ein Pferd mit Masse $M_P = 476$ kg (oben) und für ein Schaf mit Masse $M_S = 31$ kg (unten). Wir wollen die Kaubewegung als harmonische Schwingung nähern.

a) Bestimmen Sie aus den gezeigten Daten die ungefähre Kaufrequenz des Pferdes f_P und des Schafes f_S. Was ist das Verhältnis f_P/f_S?



Pferd: 7 Minima in 6 s

$\Rightarrow f_P = \frac{7}{6s} \approx 1{,}2\,Hz$

Schaf: 11 Minima in 6,2 s

$\Rightarrow f_S \approx \frac{11}{6{,}2s} \approx 1{,}8\,Hz$

$f_P/f_S = \frac{2}{3} \approx 0{,}7$

b) Was sind die Periodendauern der Kaubewegungen T_P und T_S?

Aus den Frequenzen: $T_P = \frac{1}{f_P} = 0{,}8s$; $T_S = \frac{1}{f_S} = 0{,}5s$

Alternativ: Direkt ablesen $T_P \approx 1s$; $T_S \approx 0{,}5s$

c) Als sehr einfaches Modell für die Kaubewegungen wollen wir annehmen, dass es sich um eine harmonische Schwingung des Kiefers handelt. Wir gehen davon aus, dass die Masse des Kiefers einem festen Prozentsatz p der Gesamtmasse des Tieres entspricht ($M_{\text{Kiefer}} = p \cdot M_{\text{Tier}}$) und dass die Kaumuskulatur eine lineare Rückstellkraft mit einer Federkonstante K ausübt. Wenn p und K für alle Tiere gleich sind, was ist die Vorhersage des Models für das Verhältnis f_P/f_S?

Allgemein: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ Hier: $f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{p \cdot M_{Tier}}\right)^{1/2}$

$$\frac{f_P}{f_S} = \frac{\frac{1}{2\pi}}{\frac{1}{2\pi}} \frac{\left(\frac{K}{p \cdot M_P}\right)^{1/2}}{\left(\frac{K}{p \cdot M_S}\right)^{1/2}} = \left(\frac{M_S}{M_P}\right)^{1/2} = \left(\frac{31\,kg}{476\,kg}\right)^{1/2} = 0{,}26$$

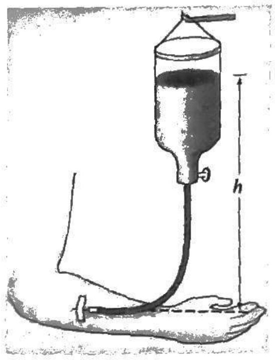
d) Beschreibt das Modell die experimentellen Daten? Wie könnte man das Modell verbessern?

Das Modell sagt den richtigen Trend voraus („Schaf kaut schneller als Pferd"), liegt aber quantitativ falsch, da experimentell $f_P/f_S \approx 0{,}5 - 0{,}7$ und die Vorhersage bei $f_P/f_S \approx \frac{1}{4}$ liegt. Verbesserungen: – $p(M)$? – Berücksichtige Kiefer-anatomie – $K(M)$ etc.

Name: ______________________________

Aufgabe 5

Fluiddynamik im Krankenhaus (15 Punkte). Ein Patient benötigt dringend eine Bluttransfusion. Das Blut soll aus einem Infusionsbeutel über einen Schlauch und durch eine dünne Kanüle (Nadel) fließen, die in die Vene eingeführt ist (siehe Abbildung). Die Kanüle sei 4,0 cm lang und habe einen kreisförmigen Innendurchmesser von 0,4 mm. Dem Patienten sollen 4,0 cm^3 Blut pro Minute zugeführt werden. Die dynamische Viskosität von Blut beträgt $\eta_B = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ Pa·s; die Dichte $\rho_B = 1{,}05 \cdot 10^3$ kg/m^3. Der Fluss durch die Kanüle kann durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben werden und die Reibung des Fluides im Schlauch kann vernachlässigt werden.



a) Welche Druckdifferenz muss zwischen Anfang und Ende der Kanüle liegen, um die benötigte Flussrate zu erreichen?

Hagen-Poiseuille: $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8 \eta \cdot l} \cdot R^4$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} \frac{8 \eta l}{\pi \cdot R^4} = 4{,}0 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{60 s} \cdot \frac{8 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s \cdot 0{,}04 m}{\pi \cdot (0{,}0002 m)^4}$$

$$= \underline{1{,}7 \cdot 10^4 Pa}$$

b) In welcher Höhe h über dem Niveau der Kanüle muss der Infusionsbeutel aufgehängt werden, um die benötigte Flussrate zu erreichen? Der Infusionsbeutel ist oben offen und der Blutdruck in der Vene beträgt 2400 Pa über Atmosphärendruck.

Druck am Beginn der Kanüle (p_1) ist gesucht.
Druck am Ende der Kanüle (p_2) ist der Druck in der Vene.

$$p_1 = (p_1 - p_2) + p_2 = 1{,}7 \cdot 10^4 Pa + 2400 Pa = 1{,}9 \cdot 10^4 Pa$$

Um diesen Druck zu erzeugen, muss der Beutel auf eine Höhe h gehängt werden, so dass

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{1{,}9 \cdot 10^4 Pa}{1{,}05 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}} = \underline{1{,}9 m}$$