Abschlussklausur

Vorname: Muster **Nachname:** Lösung

Matrikelnummer: 1234567890

Studiengang: Chemie ☐ Biologie ☐ Lehramt ☐ Sonstiges: ____________

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, Wörterbuch
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		20
3		20
4		15
5		15
Σ		100

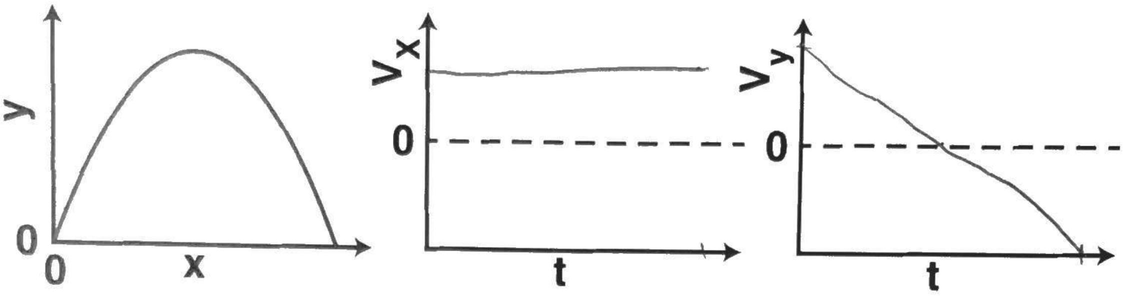
Einige nützliche Konstanten
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$
Erdmasse $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Erdradius $R_E \approx 6400$ km
Dichte von Luft bei Normaldruck und T = 20°C: 1,2 kg/m^3
Dichte von Wasser bei Normaldruck und T = 20°C: 1000 kg/m^3
Normaldruck: 1 atm = 1013 mbar = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa
Avogadro-Konstante: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann-Konstante: $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J/K
Gas-Konstante: $R = 8{,}314$ J/(K · mol)
1 cal (Kalorie) = 4,1868 J

Name: ______________________________

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, bzw. kurze Rechnung, bzw. einfache Skizze) auf die folgenden Fragen.

a) **Flugbahn.** Beim *kickoff* im American Football wird ein langer Ball gespielt, der die Flugbahn in der (x, y)-Ebene wie unten links gezeigt hat (den Luftwiderstand vernachlässigen wir hier). Zeichnen Sie schematisch in die Koordinatensysteme unten die Geschwindigkeit in x-Richtung v_x und die Geschwindigkeit in y-Richtung v_y als Funktion der Zeit t für die Flugphase des Balles ein.



b) **Statistik.** Für eine Studie bestimmen Sie das Gewicht von Igeln nach dem Winterschlaf. In einer ersten Teilstudie haben Sie $N_1 = 20$ Igel gewogen und aus den Messwerten einen Mittelwert von $\mu_1 = 985$ g und eine Standardabweichung von $\sigma_1 = 55$ g berechnet. Was ist der Stichprobenfehler sem_1 ("standard error of the mean") für die erste Teilstudie? Wenn Sie in einer zweiten Teilstudie weitere $N_2 = 20$ Igel wiegen, was erwarten Sie für die Standardabweichung σ_{ges} und für den Stichprobenfehler der Gesamtstudie sem_{ges}?

$$sem_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N_1}} = \frac{55g}{\sqrt{20}} = 12{,}3\,g$$

Erwartung für $\sigma_{ges} \approx \sigma_1 = 55g$

Erwartung für $sem_{ges} = \frac{\sigma_{ges}}{\sqrt{N_{ges}}} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N_1+N_2}} = \frac{55g}{\sqrt{40}} = 8{,}70g$

c) **Ultrazentrifuge.** Aus den Herstellerangaben einer Ultrazentrifuge wissen Sie, dass die Zentrifuge mit maximal 100 000 Umdrehungen/min rotiert. Sie haben den Radius r des Rotor (an der Stelle, wo sich die Proben befinden) gemessen und finden $r = 5$ cm. Welche maximale Zentripetalbeschleunigung wirkt auf die Proben, in Einheiten der Erdbeschleunigung g?

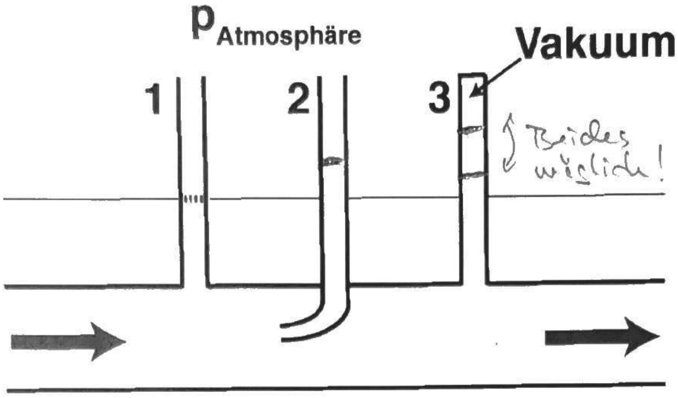
$$a_z = r \cdot \omega^2 = 0{,}05\,m \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 100\,000\,min^{-1}}{60\,s \cdot min^{-1}}\right)^2$$

$$= 5{,}48 \cdot 10^6 \,\frac{m}{s^2}$$

$$\frac{a_z}{g} = \underline{\underline{5{,}59 \cdot 10^5}}$$

Name: ____________________

d) **Drücke im Rohr.** Die Skizze unten zeigt ein Rohr, in dem ein inkompressibles und reibungsfreies Fluid von links nach rechts strömt und mit dem drei Steigrohre (1, 2 und 3) verbunden sind. Die gestrichelte Linie markiert die Höhe des Fluides in Steigrohr 1. Zeichnen Sie (schematisch) die Höhe des Fluides in den Steigrohren 2 und 3 ein. Ist die relative Höhe der Füllstände in den Rohren 2 und 3 durch die Angaben eindeutig festgelegt?



Die relative Höhe in Rohr 2 und 3 ist nicht eindeutig. Es kommt darauf an ob $\frac{1}{2}\rho v^2$ größer oder kleiner als $p_{atm.}$ ist!

e) **Drei Wellen.** Unten sind die Gleichungen für drei verschiedene transversale Wellen gegeben. Ordnen Sie die drei Wellen nach ihrer Wellengeschwindigkeit, von der größten zur kleinsten.

(1) $y(x,t) = 2\sin(4x - 2t)$
(2) $y(x,t) = \sin(3x - 4t)$
(3) $y(x,t) = 2\sin(3x - 3t)$

Allgemein: $\sin(kx - \omega t)$

Geschwindigkeit: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi}$

Für (1): $v_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
Für (2): $v_2 = \frac{4}{3} \cong 1{,}3$
Für (3): $v_3 = \frac{3}{3} = 1$

$\Rightarrow v_2 > v_3 > v_1$

f) Ordnen Sie die drei Wellen aus der letzten Teilaufgabe nach ihrer maximalen transversalen Geschwindigkeit, wieder von der größten zur kleinsten.

Transversale Geschwindigkeit: $\frac{dy}{dt} = v_{trans}$

$v_{trans_1} = -2 \cdot 2 \cos(4x - 2t)$
$v_{trans_2} = -4 \cos(3x - 4t)$
$v_{trans_3} = -6 \cos(3x \; 3t)$

$\Rightarrow v_{trans_3} > v_{trans_1} = v_{trans_2}$

g) **Längenänderung.** Die erste Eisenbahnlinie in Deutschland war die (fast) gerade 6,0 km lange Eisenbahnstrecke von Nürnberg nach Fürth. Unter der Annahme, dass es sich um durchgehende Stahlschienen handelte, wie groß ist die Längenänderung der Schienen zwischen kaltem Winterwetter (T = −10 °C) und warmen Sommerwetter (T = 30 °C)? Der thermische Längenausdehnungskoeffizient von Stahl beträgt $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ / °C.

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = \frac{17 \cdot 10^{-6}}{°C} \cdot 40°C \cdot 6000\,m = \underline{\underline{4{,}1\,m}}$$

Name: ____________________

h) **Temperaturskalen.** Schwefel schmilzt bei 388,36 K. Geben Sie den Schmelzpunkt von Schwefel in °C und °F an.

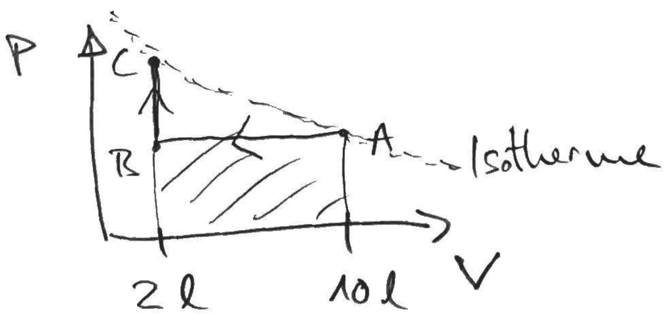
$$T_{S,°C} = \left(\frac{388{,}36\,K}{K} - 273{,}15\right)°C = \underline{115{,}21\,°C}$$

$$T_{S,°F} = \frac{9}{5}\,\frac{115{,}21\,°C}{°C}\,°F + 32\,°F = \underline{239{,}38\,°F}$$

i) **Rotation und Translation.** Für viele Größen und Beziehungen zur Beschreibung von linearen Translationsbewegungen gibt es analoge, entsprechende Größen und Beziehungen zur Beschreibung von Rotationsbewegungen. Vervollständigen Sie die Tabelle unten.

Translation	Rotation
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ($\vec{T}$ Drehmoment)

j) Ein **ideales Gas** wird langsam bei konstantem Druck ("isobar") von 2,0 bar von einem Anfangsvolumen von 10,0 l (Punkt A) auf ein Volumen von 2,0 l (Punkt B) komprimiert. Dann wird bei konstantem Volumen ("isochor") Wärme hinzugeführt, so dass Druck und Temperatur ansteigen können, bis die Temperatur ihren ursprünglichen Wert erreicht (Punkt C). Zeichnen Sie ein schematisches pV-Diagramm, dass die Punkte A, B, und C enthält und die Wege des Gases zwischen diesen Punkten. Berechnen Sie die gesamte am Gas verrichtete Arbeit $W_{A\rightarrow C}$.

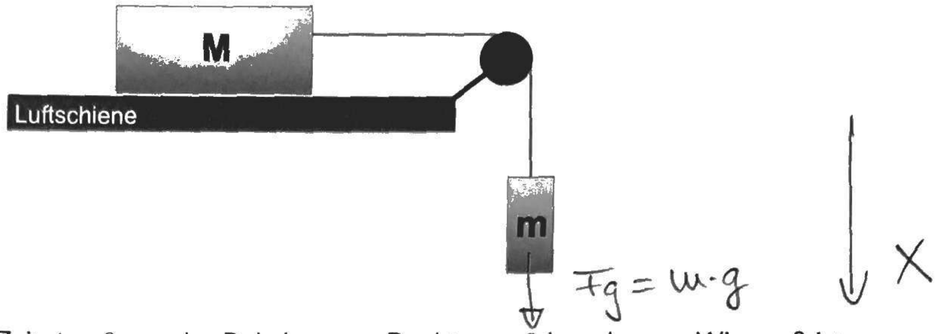


$$W = -p \cdot \Delta V = -2\,bar \cdot -8\,l = -2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot -8 \cdot 0{,}001\,m^3$$
$$= 1600\,Nm = 1600\,J$$

Name: ____

Aufgabe 2

Beschleunigter Wagen auf Luftschiene (20 Punkte). In der Vorlesung haben wir ein Experiment durchgeführt, bei dem sich ein Wagen der Masse $M = 200$ g auf einer reibungsfreien horizontalen Luftschiene befand, der über ein dünnes Seil und eine Umlenkrolle (beide als reibungs- und masselos genähert) mit einer senkrecht aufgehängten Masse $m = 50$ g verbunden war, siehe Skizze unten.



a) Der Wagen wird zur Zeit $t = 0$ aus der Ruhelage am Punkt $x = 0$ losgelassen. Wie groß ist die Beschleunigung, mit der er entlang der Luftschiene beschleunigt wird?

Newton II: $F_{ges} = m_{ges} \cdot a$

$$m \cdot g = (m+M)\, a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m}{m+M} \cdot g = \frac{0{,}05\,\text{kg}}{0{,}25\,\text{kg}} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $a = 1{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad v = at \\ &\Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} a t^2 \end{aligned}\right\} \quad v_0 \text{ und } x_0 = 0$$

b) Was ist seine Geschwindigkeit v nach $t = 1$ s?

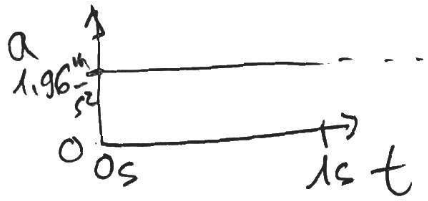
$$v = at = 1{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{s} = 1{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

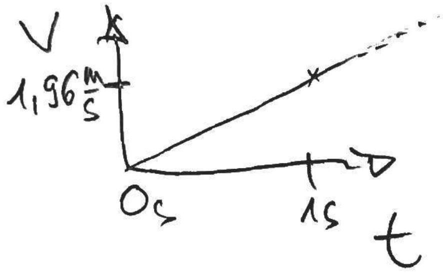
Name: ______________________________

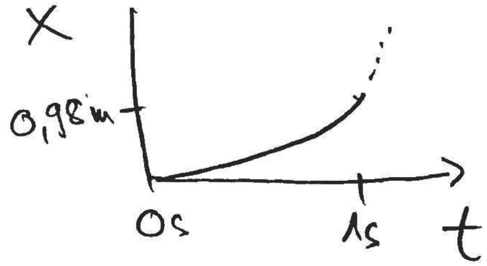
c) Was ist seine Position x nach $t = 1$ s?

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}96 \frac{m}{s^2} (1s)^2 = 0{,}98\,m$$

d) Zeichnen Sie den Verlauf der Position x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a im Zeitinterval $t = 0 \ldots 1$ s (in drei separate und klar beschriftete Koordinatensysteme).







Name: ____________________

Aufgabe 3

Bierleitung (20 Punkte). In der belgischen Stadt Brügge gibt es eine 3,2 km lange Bierleitung, die die Brauerei *De Halve Maan* in der Stadtmitte mit einer Abfüllanlage außerhalb der Stadt verbindet. Pro Jahr transportiert die Bierleitung 5 Millionen Liter Bier. Wir gehen davon aus, dass die Leitung kontinuierlich betrieben wird und aus einem durchgehenden Rohr mit einem runden Querschnitt mit einem Durchmesser von 5 cm besteht. Außerdem nehmen wir an, dass Bier in den ersten vier Teilaufgaben als ideales (inkompressibles und reibungsfreies) Fluid genähert werden kann und eine Dichte von 1050 kg/m3 und den typischen Preis von Wiesenbier (10 Euro/l) hat.

a) Was ist die Volumenflussrate in der Leitung in l/s und in Euro/s?

$$\dot V = \frac{5\cdot 10^6\,l}{1y} = \frac{5\cdot 10^6\,l}{1y\cdot 365\frac{d}{y}\cdot 24\frac{h}{d}\, 60\frac{min}{h}\cdot 60\frac{s}{min}} = 0{,}16\,\frac{l}{s}$$

$$\dot V = 0{,}16\,\frac{l}{s}\cdot 10\,€/l = 1{,}6\,\frac{€}{s}$$

b) Was ist die Flussgeschwindigkeit in der Leitung (in m/s)?

$$\dot V\ A\cdot v \Rightarrow v = \frac{\dot V}{A} \qquad A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{0{,}05\,m}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow v = 0{,}16\,\frac{l}{s}\cdot 0{,}001\,\frac{m^3}{l}\Big/\left(\pi\left(\frac{0{,}05\,m}{2}\right)^2\right) = 0{,}08\,\frac{m}{s}$$

c) Wir gehen davon aus, dass der Gesamtdruck in der Leitung auf "Straßenniveau" 10 bar beträgt. An ihrer tiefsten Stelle liegt die Leitung 34 m unterhalb des "Straßenniveaus". Was ist die Flussgeschwindigkeit an dieser Stelle? Was ist der statische Druck (d.h. der Druck ohne Stau- und Schweredruck) im Rohr an dieser Stelle?

Da das Fluid inkompressibel ist, muss die Flussgeschwindigkeit gleich sein!

Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\cdot g\cdot h = const.$

"Straßenniveau": $h_s = 0 \qquad p_s + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 = 10\,bar \mathrel{\hat=} 10^6\,Pa$

"Tiefste Stelle": $p_t + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\cdot g h_t = 10^6\,Pa$

$$\Rightarrow p_t = 10^6\,Pa - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\cdot g\, h_t = 10^6\,Pa - \frac{1}{2}1050\frac{kg}{m^3}\left(0{,}08\frac{m}{s}\right)^2 - 1050\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot(-34\,m)$$

$$= \underline{\underline{1{,}35\cdot 10^6\,Pa}}$$

Name: ____________________

d) Studenten des in Brügge ansässigen "College of Europe" beschließen, für eine Party die Bierleitung auf Straßenniveau anzubohren. Wie hoch spritzt das austretende Bier?

Am höchsten Punkt: $p = 0$ und $v = 0$

$$\Rightarrow h = \frac{p_s}{\rho \cdot g} = \frac{10^6 \, Pa}{1050 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{97{,}2 \, m}}$$

e) Jetzt wollen wir Reibungsverluste berücksichtigen und in dieser und der nächsten Teilaufgabe davon ausgehen, dass die Bierleitung durch das Gesetzt von Hagen-Poiseuille beschrieben wird. Die Brauerei plant ihre Produktion zu verdoppeln, so dass doppelt so viel Bier pro Jahr durch die Rohrleitung transportiert werden muss. Wie muss die Druckdifferenz zwischen Beginn und Ende der Leitung verändert werden, um die doppelte Biermenge pro Jahr durch das gleiche Rohr zu transportieren?

Hagen-Poiseulle: $\dot{V} = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8 \eta l} R^4$

$\Rightarrow$ Für doppelte Volumenflußrate $\dot{V}$ muss die Druckdifferenz $p_1 - p_2 = \Delta p$ verdoppelt werden.

f) Welchen Durchmesser müsste man für ein neues Rohr wählen, um die doppelte Biermenge pro Jahr zu transportieren, wenn die Länge und Druckdifferenz in der Leitung nicht verändert werden sollen?

Für die doppelte Flußrate muss der Radius nur um $2^{1/4} \cong 1{,}19$-fach erhöht werden, um den doppelten Volumenfluß zu ermöglichen.

Neuer Durchmesser ist $D' = 2^{1/4} \cdot 5 \, cm = \underline{5{,}95 \, cm}$

Name: ______________________________

Aufgabe 4

Schwingung im Spinnennetz (15 Punkte). Eine Fliege mit einer Masse von 0,60 g wird in einem Spinnennetz gefangen, das wir als harmonische Feder nähern wollen. Das Netz schwingt zunächst mit einer Frequenz von 10 Hz.

a) Wie groß ist der effektive Wert der Federkonstanten k für das Spinnennetz?

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \Rightarrow (2\pi f)^2 \cdot m = k$$

$$\Rightarrow k = \left(2\pi \cdot 10\,\frac{1}{s}\right)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-4}\,kg = 2{,}4\,\frac{N}{m}$$

b) Wenn stattdessen ein Insekt mit einer Masse von 0,40 g im Netz gefangen wird, welche Schwingungsfrequenz des Netzes würden Sie erwarten?

$$f' = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{m'}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{2{,}4\,\frac{N}{m}}{4 \cdot 10^{-4}\,kg}\right)^{1/2} = 12\,Hz$$

(Oder einfacher: $f' = f \cdot \sqrt{6/4} = 12\,Hz$)

c) Sie beobachten, dass die Schwingungsamplitude nach dem Fangen der Fliege innerhalb von 30 s auf das $1/e$-fache des Anfangswertes abgeklungen ist. Schätzen Sie die Reibungskonstante b ab, unter der Annahme, dass die Reibung die Form $F_{\text{Reibung}} = -b \cdot v = -b \cdot \dot{x}$ hat.

Amplitude fällt mit $e^{-\delta t}$ ab, wobei $\delta = \frac{b}{2m}$

$$A = \frac{1}{e} \Rightarrow t^* = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{b} \Rightarrow b = \frac{2m}{t^*}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-4}\,kg}{30\,s} = 4 \cdot 10^{-5}\,\frac{kg}{s}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 5

Wettrollen auf der schiefen Ebene (15 Punkte). Eine Kugel und ein Vollzylinder mit gleichem Radius R und gleicher Masse M *rollen* eine schiefe Ebene herunter. Die anfängliche Höhe sei h. Hinweise: Rollbedingung bedeutet $v = \omega \cdot R$. Das Trägheitsmoment einer Vollkugel ist $I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}MR^2$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Vollzylinders am Ende der schiefen Ebene, d.h. bei $h = 0$.

$I_{Zylinder} = I_Z = \frac{1}{2} M R^2$ Eges ist konstant!

Oben: $E_{pot} = M \cdot g \cdot h$ $E_{kin} = E_{rot} = 0$

Unten: $E_{pot} = 0$ $E_{ges} = E_{kin} + E_{rot} \stackrel{!}{=} M \cdot g \cdot h$

$\Rightarrow M \cdot g h = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\frac{v^2}{R^2}$

$\Rightarrow M g \cdot h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) M v^2 = \frac{3}{4} M v^2 \rightarrow v^2 = \frac{4}{3} g \cdot h$

$\Rightarrow v = \left(\frac{4}{3} g h\right)^{1/2}$

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Kugel am Ende der schiefen Ebene, d.h. bei $h = 0$.

Gleiches Argument für die Kugel

$M g h = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M R^2\right)\frac{v^2}{R^2}$

$\rightarrow M g h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) M v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{10}{7} g h$

$\rightarrow v = \left(\frac{10}{7} g \cdot h\right)^{1/2}$

c) Wer kommt zuerst unten an?

$\sqrt{\frac{10}{7}} \approx 1{,}20 > \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15 \Rightarrow v_{Kugel} > v_{Zylinder}$

Die Kugel kommt zuerst an!

d) Wie ändert sich das Ergebnis der letzten Teilaufgabe, wenn die Objekte nicht rollen, sondern eine reibungsfreie Ebene hinunterrutschen?

Dann ist $\omega = 0$ und für beide Körper gilt

$M g h = \frac{1}{2} M v^2 \rightarrow$ Beide kommen gleichzeitig an.