**Angaben im Stil [Vx, Sy] zu jeder Aufgabe beziehen sich auf die Vorlesungsfolien vom WS2015/2016, in der "kompletten" Fassung.
V = Vorlesungsnummer;
S = Seite / Folienummer innerhalb der Vorlesung**

Wiederholungsklausur

Name: MUSTERLÖSUNG

Matrikelnummer: 1234567890

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, Wörterbuch
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		15
3		15
4		20
5		20
Σ		100

Einige nützliche Konstanten
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Erdmasse $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Erdradius $R_E \approx 6400$ km
Dichte von Luft bei Normaldruck und T = 20°C: 1,2 kg/m^3
Dichte von Wasser bei Normaldruck und T = 20°C: 1000 kg/m^3
Normaldruck: 1 atm = 1013 mbar = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa

Name: ______________________________

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, bzw. kurze Rechnung, bzw. einfache Skizze) auf die folgenden Fragen.

a) Zwei Objekte (Objekt A mit Masse M und Objekt B mit Masse $2M$) werden (nebeneinander) über eine als reibungslos angenommene Oberfläche geschoben. Beide Massen starten in Ruhe, auf beide wirkt (jeweils) eine Kraft C und beide werden eine Strecke der Länge D geschoben. Welches Objekt legt die Distanz D in der kürzeren Zeit zurück? Warum?

$\boxed{\text{V3, S15 \& S5}}$

Newton II: $F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow$ Die leichtere Masse A erfährt eine größere Beschleunigung und legt die Strecke D schneller zurück

Quantitativ: 1D Bewegung, $a = \text{const.}$

$v_0 = x_0 = 0$; $x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \left(\frac{2x}{a}\right)^{1/2}$

Für Objekt A: $t_A = \left(\frac{2D}{C}M\right)^{1/2}$ Für Objekt B: $t_B = \left(\frac{2D}{C}2M\right)^{1/2} = \sqrt{2}\, t_A > t_A$!

b) Welches der beiden Objekte aus der letzten Teilaufgabe hat nach dem Zurücklegen der Strecke D die größere kinetische Energie? Warum?

Konstante Kraft C über Strecke D verrichtet Arbeit:

$W = C \cdot D$

$\boxed{\text{V5, S19}}$ $\boxed{\text{V5, S25}}$

Zu Beginn: $v = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 0 = E_{kin}^{vorher}$

Da keine Reibung wirkt, ist die kinetische Energie nach Strecke D gleich der verrichteten Arbeit: $E_{kin}^{nachher} = C \cdot D$

$\Rightarrow$ Beide Objekte haben die gleiche kinetische Energie!

c) Jetzt berücksichtigen wir Reibung in der Situation der letzten beiden Teilaufgaben. Wenn wir davon ausgegen, dass für beide Objekte ein Gleitreibungskoeffizient μ mit der Oberfläche gilt, welches Objekt hat die größere kinetische Energie beim Erreichen der Distanz D? Warum?

$\boxed{\text{V4, S19}}$

Reibungskraft: $F_R = \mu F_N = \mu \cdot m \cdot g$

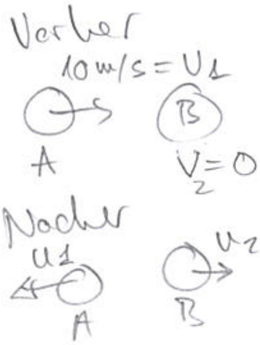
B hat größere Masse $\Rightarrow$ B hat größere Normalkraft

$\Rightarrow$ B erfährt größere Reibungskraft

$\Rightarrow$ Reibungsverluste für B sind größer (bzw. Beschleunigung kleiner), somit hat B nach Strecke D geringere kinetische Energie!

Name: ______________________________

d) Jetzt gehen wir wieder von einer reibungsfreien Oberfläche aus und betrachten die Situation, dass sich Objekt B aus den letzten Teilaufgaben in Ruhe befindet und Objekt A mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s direkt auf Objekt B zuläuft. Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Objekte nach einem vollständig elastischen (und eindimensionalen) Stoß? $\boxed{V6, S21}$



$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{M - 2M}{M + 2M} \cdot 10\,\frac{m}{s} = -\frac{1}{3} \cdot 10\,\frac{m}{s}$$

$$= -3{,}3\,\frac{m}{s} \text{ (nach links in Skizze)}$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2M}{M + 2M}\, 10\,\frac{m}{s} = 6{,}6\,\frac{m}{s} \text{ (nach rechts in Skizze)}$$

e) Eine Ultrazentrifuge zur analytischen Preparation von Makromolekülen hat einen Rotor mit einem Radius von 5 cm und dreht sich mit 100 000 rpm (=10^5 Umdrehungen/min). Was ist die Zentriptalbeschleunigung, die auf die Proben wirkt (in SI Einheiten und als Vielfache der Erdbeschleunigung g)? $\boxed{V4, S9_{\&10}}$

$$a_{zent.} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{100\,000 \text{ min}^{-1}}{60 \frac{s}{min}} \cdot 2\pi \right)^2 \cdot 0{,}05\,m$$

$$\left(g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right) \qquad = 5{,}5 \cdot 10^6\,\frac{m}{s^2} = 5{,}6 \cdot 10^5 \cdot g$$

f) Was ist der Fehler in der Zentriptalbeschleunigung aus der letzten Teilaufgabe, wenn der Messfehler für den Rotorradius 1 cm und der Fehler für die Winkelgeschwindigkeit 10% betragen? $\boxed{V2, S15}$

$$\Delta a_{zentr} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} (\omega^2 \cdot r)\, \Delta r \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \cdot r)\, \Delta\omega \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left((\omega^2 \cdot \Delta r)^2 + (2\, \omega \cdot r\, \Delta\omega)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\left(\left(1{,}0 \cdot 10^4\,\tfrac{1}{s}\right)^2 \cdot 0{,}01\,m \right)^2 + \left(2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^4\,\tfrac{1}{s} \cdot 0{,}05\,m \cdot 10^3\,\tfrac{1}{s} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\Delta a_{zent} = 1{,}4 \cdot 10^6\,\frac{m}{s^2}$$

g) Welche (resultierende/Netto) Kraft wirkt auf den Rotor, wenn die Proben in der Zentrifuge aus den zwei letzten Teilaufgaben nicht ausbalanciert wurden und sich auf einer Seite des Rotor dadurch eine extra Masse von 1 g (= 0.001 kg) befindet?

$$F_{zent} = m \cdot a_{zent}$$

$$= 0{,}001\,kg \cdot 5{,}5 \cdot 10^6\,\frac{m}{s^2} = 5500\,\frac{kg\,m}{s^2} = \underline{\underline{5{,}5\,kN}}$$

$\boxed{V4, S9}$

Name: ______________________________

h) Wie schnell bewegt sich ein Meterstab (der in seinem Bezugssystem genau 1,0 m lang ist) relativ zu Ihnen, wenn er in Ihrem Bezugssystem 0,5 m lang erscheint?

$\boxed{V12, S17 \& 19}$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{L_0}{L} = \frac{1{,}0\,m}{0{,}5\,m} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \underline{\underline{0{,}87c}}$$

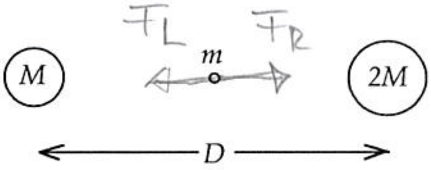
i) Ein neuer NASA Ingenieur stellt Schuhe mit Saugnäpfen vor, die er für Astronauten entwickelt hat, die damit außen am Raumfahrzeug (im Weltraum) arbeiten sollen. Was kann an diesem Plan nicht funktionieren?

$\boxed{V8, S21 \quad 8S23}$

Saugnäpfe funktionieren durch den Druckunterschied zwischen dem Luftdruck außen und dem geringeren Luftdruck innen.
Im Weltraum ist der Luftdruck außen Null, und somit die "Haltkraft" ebenfalls Null.

j) Zwei kugelförmige Sterne der Massen M and $2M$ befinden sich in einem Abstand D, gemessen von den jeweiligen Mittelpunkten der Sterne (siehe Skizze). Ein kleiner Asteroid der Masse m befindet sich genau in der Mitte zwischen den beiden Sternen. Was ist die Richtung und der Betrag der Gesamtgravitationskraft (als Funktion der angegebenen Größen), die auf den Asteroid wirkt?

$\boxed{V5, S11}$



Allgemein: $F_{Grav} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\hat{r}$

Nach links, durch Masse M: $F_L = G\frac{M \cdot m}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4GMm}{D}$

Nach rechts, durch Masse $2M$: $F_R = G\frac{2M \cdot m}{(D/2)^2} = \frac{8GMm}{D}$

$F_{gesamt} = F_R - F_L = \frac{4GMm}{D}$ <u>nach rechts</u>

Name: ____________________

Aufgabe 2

Autofederung (15 Punkte). Wenn sich eine vierköpfige Familie mit einer Gesamtmasse von 200 kg in ihr Auto mit einer Masse von 1200 kg setzt, wird die Federung des Autos um 3 cm komprimiert (zusammengedrückt). Sie können die Federung des Autos als eine einzige, harmonische Feder betrachten.

$\boxed{V3, S19}$

a) Wie groß ist die Federkonstate der Federung des Autos?

Allgemein: $F = -kx \Rightarrow |k| = \frac{F}{x} = \frac{m \cdot g}{x}$

$$|k| = \frac{200\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{0{,}03\,m} = \underline{\underline{6{,}5 \cdot 10^4\,\frac{N}{m}}}$$

b) Wie weit sackt das Auto nach unten, wenn es mit 300 kg beladen wird?

$\boxed{V3, S19}$

$$|x| = \frac{F}{k} = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{300\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{6{,}5 \cdot 10^4\,\frac{N}{m}} = 0{,}045\,m = \underline{4{,}5\,cm}$$

[Oder einfach durch die Linearität: $3\,cm \cdot \frac{300\,kg}{200\,kg} = \underline{\underline{4{,}5\,cm}}$]

c) Jetzt fährt das Auto mit der Familie über eine Unebenheit und die Federung beginnt zu schwingen. Was sind Frequenz und Periode der Schwingung? Sie können davon ausgehen, dass die Stoßdämpfer minderwertig sind, so dass das Auto ungedämpft schwingt.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \left(\frac{6{,}5 \cdot 10^4\,\frac{kg}{s^2}}{1400\,kg} \right)^{-1/2} = \underline{\underline{0{,}92\,s}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{T} = \underline{\underline{1{,}1\,Hz}}$$

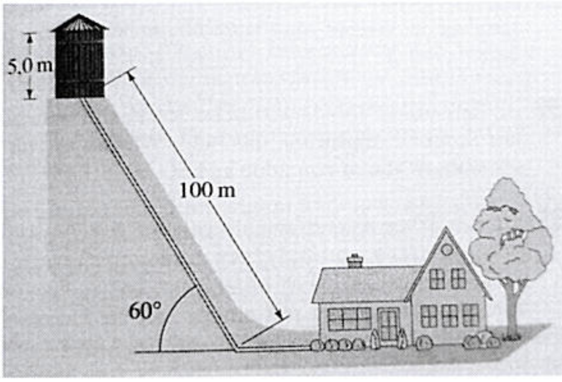
$\boxed{V10, S9810}$

Name: ______________________________

Aufgabe 3

Wasserdruck (15 Punkte). Ein Haus wird durch einen vollen Wassertank versorgt, der 5,0 m hoch ist und sich auf einem Berg befindet (siehe Skizze). Die Zuleitung zum Haus ist 100 m lang und hat einen Winkel von 60° zur Horizontalen. Sie können Reibungseffekte und Turbulenz vernachlässigen.

$h = H + 5{,}0\,m$ $\quad H$



$$H = 100\,m \cdot \sin(60°) = \underline{\underline{86{,}6\,m}}$$

$\boxed{V8, S23}$

a) Wie groß ist der Manometerdruck (d.h. der Wasserdruck in Ruhe) auf dem Bodenniveau des Hauses?

$$P = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h = 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (5{,}0 + 86{,}6)\,m$$
$$= 8{,}98 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2} \approx 9{,}0 \cdot 10^5\,Pa$$

$= d$

b) Wie hoch würde das Wasser aus einer defekten Leitung vor dem Haus nach oben spritzen?

$\boxed{V9, S12, S13}$

Ausströmgeschwindigkeit: $v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

<u>Energieerhaltung</u>: Unten am Leck:

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_A^2$

Oben, bei der „Fontäne":

$E_{kin} = 0$; $E_{pot} = m \cdot g d$

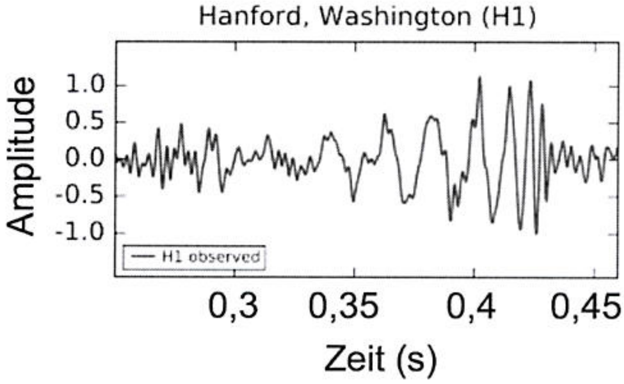
$\Rightarrow E_{pot} = E_{kin} \Rightarrow \cancel{m} g d = \frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{2 g \cdot h}{g} = \underline{h}$

Das Wasser würde <u>91,6 m</u> hoch spritzen.

Name: ______________________________

Aufgabe 4

Gravitationswellen (20 Punkte). Im Februar 2016 präsentierte ein internationales Team von Physikern den ersten direkten experimentellen Nachweis von sogenannten Gravitationswellen. Die von Einstein vorhergesagten Gravitationswellen sind Schwingungen des Raumes, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) ausbreiten. Die Abbildung unten zeigt das Signal einer Gravitationswelle, die von einem Detektor in Hanford im US-Bundesstaat Washington gemessen wurde.



a) Handelt es sich bei der in der Abbildung oben gezeigten Gravitationswelle um eine harmonische Welle der Form $A \cdot \sin(kx - \omega t + \Phi)$? Warum oder warum nicht?

Nein! Amplitude A ist nicht konstant.
Frequenz ist ebenfalls nicht konstant.

$\boxed{\text{V11, S11}}$

b) Betrachten Sie jetzt die Schwingung der Welle im Zeitintervall 0,4 bis 0,43 s. Was ist die ungefähre mittlere Frequenz der Welle in diesem Bereich? (Eine grobe Abschätzung auf einen Faktor 2-3 genau ist ausreichend).

3 Maxima in $\sim 0{,}03$ s $\Rightarrow T \approx \frac{0{,}03\,s}{3} = 0{,}01\,s$

$\Rightarrow f \approx 100\,Hz$

$\boxed{\text{V11, S11}}$

Name: ______________________________

c) Benutzen Sie ihre Abschätzung aus der letzten Teilaufgabe, um die ungefähre Wellenlänge der Gravitationswelle in diesem Interval zu bestimmen.

Allgemein: $c = \lambda \cdot f$

$\boxed{\text{V11, S12}}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{100 \frac{1}{s}} = 3 \cdot 10^6 \, m$$

$$\approx 3000 \, km$$

d) Der glaubhafte Nachweis der Gravitationswelle beruht nicht allein auf dem in der Abbildung oben gezeigten Signal, sondern vor allem aus der Tatsache, dass ein ganz ähnlicher Detektor im US-Bundesstaat Louisiana, 3000 km von dem Detektor in Hanford entfernt, mit einer zeitlichen Verzögerung Δt ein fast identisches Signal der sich im Raum ausbreitenden Welle gemessen hat. Berechnen Sie die zu erwartende zeitliche Verzögerung Δt.

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; hier $\Delta x = 3000 km$

und $v = c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

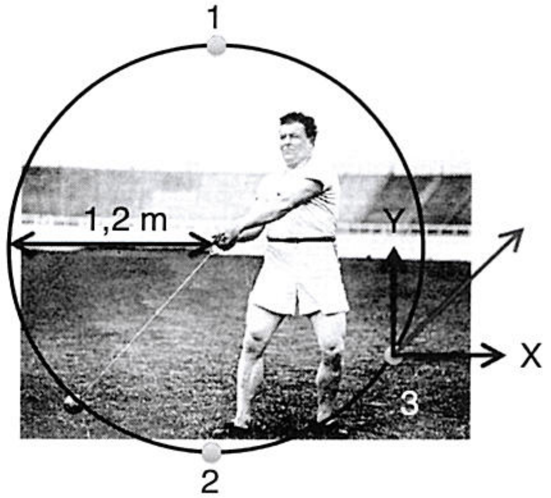
$$\rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{3 \cdot 10^6 \, m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 0{,}01 \, s = \underline{\underline{10 \, ms}}$$

$\boxed{\text{V11, S12}}$

Name: ______________________________

Aufgabe 5

Hammerwurf (20 Punkte). Die Abbildung unten zeigt den Hammerwerfer John Flanagan, der bei den olympischen Spielen 1908 die Goldmedaille gewann. Beim Hammerwurf besteht der „Wurfhammer" aus einer 7 kg schweren Metalkugel an einem 1,2 m langen Drahtseil (das wir hier als masselos annähern). Sie können die Luftreibung in der gesamten Aufgabe vernachlässigen.



a) Im ersten Teil betrachten wir die Situation, dass John Flanagan den Hammer auf eine Bahngeschwindigkeit von 10 m/s am höchsten Punkt ("1" in der Skizze) gebracht hat und dann das Seil des Wurfhammer nur noch festhält, so dass sich der Hammer auf einer kreisförmigen Bahn gegen den Uhrzeigersinn (annähernd reibungsfrei) bewegt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Hammers am tiefsten Punkt ("2" in der Skizze)?

$\boxed{\text{V5, S25}}$

Energieerhaltung:

$E_{kin,2} = E_{kin,1} + \Delta E_{pot}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \Delta h \cdot m \cdot g$

$\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2 \Delta h \cdot g = (10 \frac{m}{s})^2 + 2 \cdot (2 \cdot R) \cdot g$

$= (10 \frac{m}{s})^2 + 4 \cdot 1{,}2 m \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = 147 (\frac{m}{s})^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{v_2 = 12{,}1 \, m/s}}$

Name: ______________________________

b) Jetzt betrachten wir die Situation, dass John Flanagan den Hammer auf eine Bahngeschwindgkeit von 25 m/s am Punkt "3" beschleunigt hat und den Hammer dort in einem 45° Winkel zur Horizontalen abwirft. Wie weit fliegt der Hammer (in X Richtung, siehe Skizze)? Sie können davon ausgehen, dass die Abwurfhöhe (in Y) 1,0 m über der Höhe ist, auf der sich der Aufschlagspunkt des Hammers befindet.

$\boxed{\checkmark 3{,}5}$ 9

Bewegung in X: $X = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0,x} t + x_0$

$$\left.\begin{aligned} v_{0,x} &= 25\,\tfrac{m}{s} \cdot \cos 45° \\ x_0 &= 0 \\ a_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad X = 17{,}7\,\tfrac{m}{s} \cdot t$$

Bewegung in Y $\quad Y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0,y} t + y_0$

$y_0 = 1\,m$

$a_y = -g$

$v_{0,y} = 25\,\frac{m}{s} \sin 45° \qquad y = -\frac{1}{2}\left(9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right) t^2 + 17{,}7\,\frac{m}{s} t + 1\,m$

Beim Aufschlag: $Y = 0$ $\Rightarrow$ Quadratische Gleichung für t

$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2} 9{,}8\,\frac{m}{s^2} t^2 + 17{,}7\,\frac{m}{s} t + 1\,m$

$\Rightarrow \quad 0 = t^2 - 3{,}6\,t - 0{,}2$

$\Rightarrow \quad t = \frac{3{,}6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2 + 0{,}2} = \underline{3{,}7\,s}$

(Negative Lösung ist unphysikalisch!)

Einsetzen in Bewegung für X:

$X = 17{,}7\,\frac{m}{s} \cdot 3{,}7\,s = \underline{\underline{65{,}5\,m}}$