Wiederholungsklausur

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: XXX

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter.
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		20
3		20
4		15
5		15
Σ		100

Einige nützliche Konstanten

Gravitationskonstante $G =$ 6,67 $\cdot 10^{-11}$ m^3/(kg $\cdot$ s^2)
Erdmasse $M_E =$ 5,97 $\cdot 10^{24}$ kg
Mondmasse $M_M =$ 7,35 $\cdot 10^{22}$ kg
Erdradius $R_E \approx$ 6400 km
Mondradius $R_M \approx$ 1700 km
Atmosphärischer Luftdruck bei 20°C = 1,013 $\cdot 10^5$ Pa
Dichte von Luft bei 20° = 1,20 kg/m^3
Dichte von Wasser bei 20° = 1000 kg/m^3
Schallgeschwindigkeit in Luft = 340 m/s

Name: ____________________

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, ggf. mit kurzer Rechnung) auf die folgenden Fragen.

a) Wie ändert sich die Kreisfrequenz ω und die Gesamtenergie E_{ges} eines harmonische schwingenden Systems, wenn sich die Masse m verdoppelt (die Federkonstante und Anfangsamplitude aber gleich bleiben)?

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ⇒ ω nimmt um $\sqrt{2}$ ab, wenn sich m verdoppelt.

$E_{ges} = \frac{1}{2} k x_{max}^2$ ist unabhängig von m, d.h. ändert sich nicht.

b) Menschen können Schallwellen im Frequenzbereich von 20 Hz bis 20 kHz hören. Was ist die Wellenlänge von Schallwellen mit i) 20 Hz und ii) 20 kHz?

Allgemein $c = \lambda \cdot f$ c = Schallgeschwindigkeit = 340 m/s

Bei 20 Hz ⇒ $\lambda = c/f = 340\,\text{m/s} / 20\,\text{1/s} = \underline{\underline{17\,\text{m}}}$

Bei 20 kHz ⇒ $\lambda = c/f = 340\,\text{m/s} / 20\cdot 10^3\,\text{1/s} = 0{,}017\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}7\,\text{cm}}}$

c) **Treppenwettlauf.** Der Rekord beim *Perlachturmlauf* in Augsburg (insgesamt 261 Stufen) liegt bei 47 s. Der Rekord beim *Empire State Building Run Up* (insgesamt 1576 Stufen) ist 9 Minuten und 33 Sekunden. Was war i) die mechanische Arbeit gegen die Schwerkraft und ii) die mechanische Leistung bei beiden Rekorden? Gehen Sie davon aus, dass die Rekorde von 70 kg schweren Athleten aufgestellt wurden und alle Stufen genau 20 cm hoch sind.

Mechanische Arbeit: $W_{mech} = \Delta h \cdot m \cdot g$

Mechanische Leistung: $P_{mech} = W_{mech} / \Delta t$

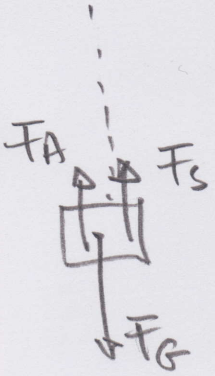
Perlachturm: $W_{mech} = \Delta h \cdot m \cdot g = 261 \cdot 0{,}2\,\text{m} \cdot 70\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 = \underline{3{,}58 \cdot 10^4\,\text{Nm}}$

$P_{mech} = 3{,}58 \cdot 10^4\,\text{J} / 47\,\text{s} = \underline{762\,\text{W}}$

Empire State: $W_{mech} = \underline{2{,}16 \cdot 10^{5}\,\text{Nm}}$ 2

$P_{mech} = \underline{377\,\text{W}}$

d) *Aerogele* sind hochporöse Festkörper, bei denen bis zu 99,98 % des Volumens aus Poren bestehen. Ein würfelförmiger Block eines Aerogels mit 10 cm Kantelänge hat eine mittlere Dichte (inklusive der eingeschlossenen Luft) $\rho_{AG} = 2.3$ kg/m^3. Der Würfel wird an einer Schnur in Luft (bei 20°C und Normaldruck) aufgehängt. Wie groß ist die Spannkraft in der Schnur?



Gewichtskraft $F_G = m \cdot g = \rho_{AG} \cdot V \cdot g$

Auftriebskraft in Luft: $F_A = \rho_{Luft} \cdot V \cdot g$

Spannkraft: $|F_S| = F_G - F_A$

$$= (\rho_{AG} - \rho_{Luft}) \cdot V \cdot g$$

$V = (0{,}1\,m)^3 = 10^{-3}\,m^3$

$$= \left(2{,}3 \frac{kg}{m^3} - 1{,}2 \frac{kg}{m^3}\right) 10^{-3}\,m^3 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = \underline{\underline{0{,}011\,N}}$$

e) Sie werfen einen Stein in einen tiefen Brunnen. Nach einer Zeit $t = 5$ s hören Sie den Stein ins Wasser fallen. Wie tief ist der Brunnen? Sie können den Luftwiderstand und die endliche Schallgeschwindigkeit vernachlässigen.

Konstante Beschleunigung; Setze $z_0 = 0$

$v_0 = 0$ („fallen lassen")

$z(t) = \frac{1}{2} g t^2$

$z(t = 5s) = \frac{1}{2}\, 9{,}8\, m/s^2\, (5s)^2 = \underline{\underline{122{,}5\,m}}$ tief

f) Wird die Zeit t aus der letzten Teilaufgabe größer oder kleiner, wenn sie den Stein in einen Brunnen gleicher Tiefe werfen, aber nun die Schallgeschwindigkeit in Luft berücksichtigen? Kann man den Unterschied mit einer Stoppuhr messen?

Die Zeit wird länger, da wir noch warten müssen, bis der Schall vom Aufschlag oben ankommt.

Das dauert $\Delta t = \frac{\Delta x}{c_{Schall}} = \frac{122{,}5\,m}{340\,m/s} = 0{,}36\,s$

Dies kann man mit einer Stoppuhr messen; Stoppuhren messen üblicherweise auf $\frac{1}{100}$ s genau und auch die menschliche Reaktionszeit ist $< 0{,}3\,s$.

g) Wie ändern sich i) die Masse und ii) das Trägheitsmoment für Rotation um eine Achse durch die Kugelmitte, wenn man den Radius einer (massiven) Kanonenkugel verdoppelt?

i) Masse: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \sim R^3$

$\Rightarrow$ Die Masse erhöht sich um einen Faktor 8, wenn sich der Radius verdoppelt.

ii) Trägheitsmoment $I = \frac{2}{5} m R^2 = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi \rho R^5 \sim R^5$

$\Rightarrow$ Das Trägheitsmoment erhöht sich $2^5 = 32$-fach.

h) Während der Vorlesung haben wir den Liebig-Hörsaal mit einem Zollstock vermessen. Ein Satellit in einem *low earth orbit* überfliegt den Hörsaal mit einer Geschwindigkeit von 8 km/s. Ist der Hörsaal vom Bezugssystem des Satelliten aus gesehen kürzer oder länger als unsere Messung? Kann man den Unterschied mit der Messgenauigkeit unseres Zollstockes (1 mm) messen?

Bewegte Bezugssysteme messen auf Grund der Längenkontraktion immer eine kleinere Länge L als die Eigenlänge L_0:

$$L = L_0 / \gamma \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$\Rightarrow$ Diese Abweichung kann man sicher nicht mit einem Zollstock messen.

Hier: $\gamma = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{8\,km/s}{300\,000\,km/s}\right)^2\right)^{1/2}} \approx 1{,}000\ldots = 1-\varepsilon$

mit $\varepsilon = 3{,}5 \cdot 10^{-10}$

i) Eine Notstromversorgung bezieht ihre Energie aus einem zylinderförmigen Schwungrad mit Radius $r = 25$ cm, Dicke $d = 10$ cm, aus Stahl mit einer Dichte $\rho = 7000\ \mathrm{kg/m^3}$. Wie schnell muss sich das Schwungrad drehen, um ein Laptop (elektrische Leistung ≈ 100 W) 5 min lang versorgen zu können? Vernachlässigen sie Energieverluste durch Reibung und Energieumwandlung.

$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ und $I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 d\, r^2$

$= \frac{1}{2}\pi\rho d r^4$

wir benötigen $E_{elec} = P_{elec} \cdot \Delta t = 100\,W \cdot 300\,s = 3 \cdot 10^4\,J$

$\Rightarrow E_{rot} = E_{elec} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2E_{elec}}{I} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^4\,J}{\frac{1}{2}\pi\, 7000\,kg/m^3\ 0{,}1\,m\,(0{,}25\,m)^4}$

$\Rightarrow \omega = 118\ \frac{rad}{s} = 19$ Umdrehungen/s

Name: ____________________

Aufgabe 2

Fluchtgeschwindigkeit (20 Punkte). Eine Weltraumission ist auf dem Mond gelandet. Nach Beendigung ihrer wissenschaftlicher Experimente wollen die Astronauten den Mond wieder mit ihrer Rakete verlassen.

a) Welche Geschwindigkeit muss die Rakete erreichen, um das Gravitationsfeld des Mondes komplett zu verlassen, d.h. wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit v_{Flucht} (die ausreicht, um - ohne weiteren Antrieb nach Erreichen von v_{Flucht} - mit einer Endgeschwindigkeit von Null in sehr großem Abstand zum Mond zu enden)? Die Rotation des Mondes und andere Himmelskörper können hier vernachlässigt werden.

Fluchtgeschwindigkeit für $E_{pot,G} + E_{kin} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{G \cancel{m} M_M}{r_M} + \frac{1}{2} \cancel{m} v_{Flucht}^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2 G M_M}{r_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} kg}{1{,}7 \cdot 10^6 m}}$$

$$= 2{,}4 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 2{,}4 \frac{km}{s}$$

b) Nehmen wir an, dass die Rakete eine Masse von 10^4 kg hat und dass die *Boosterrakete* während der Startphase 60 s lang eine konstante Schubkraft erzeugt. Wie groß muss die Schubkraft sein, dass die Rakete nach 60 s die Fluchtgeschwindigkeit aus dem erste Aufgabenteil erreicht? Sie können die Massenänderung der Rakete während der Startphase vernachlässigen. Wenn Sie die erste Teilaufgabe nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $v_{Flucht} = 3$ km/s weiter.

F_{Schub} = konstant = $m a$ $\Rightarrow$ konstante Beschleunigung

$$\Rightarrow v(t) = a \cdot t = \frac{F_{Schub}}{m} \cdot t$$

$$\Rightarrow F_{Schub} = \frac{v_{Flucht}\, m}{t} = \frac{2{,}4 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \cdot 10^4 kg}{60 s}$$

$$= 4{,}0 \cdot 10^5 N$$

c) Welche Schubkraft wird benötigt, um mit konstanter v_{Flucht} gegen den Luftwiderstand der Erdatmosphäre in Bodennähe bei 20°C zu fliegen? Nehmen Sie an, dass die Rakete eine Querschnittsfläche von 4 m^2 und einen Widerstandskoeffizienten von $C_w = 0,1$ hat.

Newton Reibung in Luft:

$$F_{Reibung} = \frac{1}{2} \rho \cdot A c_w \cdot v^2$$

$$= \frac{1}{2} 1,2 \frac{kg}{m^3} \cdot 4 m^2 \cdot 0,1 \cdot (2,4 \cdot 10^3 \frac{m}{s})^2$$

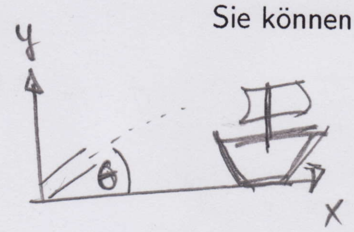
$$= \underline{1,38 \cdot 10^6 \, N}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3

Schiefer Wurf (20 Punkte). Ein Piratenschiff, die *Black Pearl* unter dem Kommando von *Captain Jack Sparrow*, befindet sich in einem Abstand von 500 m von einer an der Küste gelegenen Festung. Die Kanonen der Festung liegen auf Höhe des Meeresspiegels und verschießen Kugeln mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 100$ m/s in einem variablen Winkel θ zur Horizontalen. Sie können den Luftwiderstand zunächst vernachlässigen.

a) In welchem Winkel θ müssen die Kanonen abgefeuert werden, um das Schiff zu treffen? Sie können die trigonometrische Identität $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \sin(2\theta)$ verwenden.



In x-Richtung: $a_x = 0$

$v_x = v_{x,0} = \cos\theta \cdot v_0$

$x = v_{x,0} \cdot t = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$

In y-Richtg: $a_y = -g$

$v_y = -gt + v_{y,0} = -gt + v_0 \sin\theta$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \cdot t$

Treffe Schiff bei $y(t) = 0$

$\Rightarrow y(t) = 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \cdot t$

$\Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$

Zu dieser Zeit ist $x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$

b) In welchem Abstand zur Küste muss Jack Sparrow sein Schiff positionieren, um genau ausserhalb der Reichweite der Kanonen zu bleiben?

Teil a), fortgesetzt

$x(t) = 500\,m = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$

$\Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\left(\frac{500\,m \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{(100\,m/s)^2}\right)$

$\Rightarrow \theta = 14{,}7°$ oder $75{,}3°$

b) Maximale Reichweite ist bei $\theta = 45°$ (wo $\sin(2\theta)$ maximal wird):

$x(t) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) = \frac{(100\,\frac{m}{s})^2}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} \sin(90°)$

$= 1{,}02 \cdot 10^3\,m \approx \underline{\underline{1\,km}}$

c) Wird der "Sicherheitsabstand" aus Teil b) größer oder kleiner wenn man i) den Luftwiderstand berücksichtigt oder ii) sich die Kanonen auf einer Klippe oberhalb des Meeresspiegels befinden?

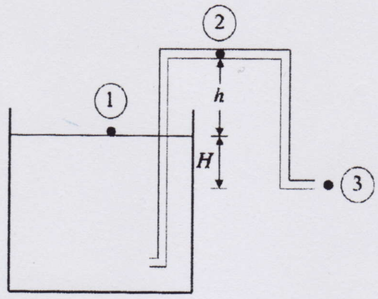
i) Luftwiderstand verringert die Reichweite und somit den Sicherheitsabstand (da $v_x(t)$ durch die Luftreibung abnimmt)

ii) Eine erhöhte Position erhöht die Reichweite und den Sicherheitsabstand (da dann das Schiff unterhalb von $y(t=0)$ getroffen wird).

Name: ____________________

Aufgabe 4

Saugheber (15 Punkte). Ein Saugheber oder *Ansaugrohr* ist ein umgekehrtes U-Rohr, mit dem man eine Flüssigkeit aus einem Tank oder Behälter über den Behälterrand ins Freie entleeren kann. Der große Tank (Position 1 in der Skizze) sei nach oben offen und das Rohr sei komplett mit Wasser gefüllt. Der Ausfluss des Rohres (Position 3 in der Skizze) befindet sich eine Höhe $H = 1$ m unterhalb des Wasserspiegels im Tank. Position 2 befindet sich $h = 2$ m über dem Wasserspiegel. Sie können die Strömung als ideal annehmen und die Veränderung des Wasserstandes im Tank vernachlässigen.



a) Was ist die Geschwindigkeit v_3 mit der das Wasser aus dem Ausfluss strömt?

Bernoulli-Gleichung:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const.}$$

An Position 1: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3$ (Position 3)

$v_1 = 0$; $p_1 = p_3 =$ Atmosphärendruck ; $h_1 - h_3 = H$

$$\Rightarrow v_3^2 = \frac{2\rho g (h_1 - h_2)}{\rho} \Rightarrow v_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot 1m} = 4{,}4 \frac{m}{s}$$

b) Was ist der Manometerdruck p_2 (d.h. der Druck relativ zum Atmosphärendruck) an der Position 2?

Bei Position 2:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3$$

$v_2 = v_3$ wegen Kontinuität ; $p_3 =$ Atmosphärendruck p_0

$$\Rightarrow p_2 - p_3 = \rho g (h_3 - h_2)$$

$$\Rightarrow p_2 - p_0 = -\rho g (H + h) = -1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \, 3m$$

$$= -2{,}94 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$$

d.h. der Druck ist negativ relativ zum Atmosphärendruck.

Name: ______________________________

Aufgabe 5

Harmonischer Verbrennungsmotor (15 Punkte). Die Bewegung eines Kolbens im Zylinder eines Automotors können wir annähernd als harmonische Oszillation betrachten. Der Zylinder sei vertikal angeordnet, so dass sich der Kolben gerade auf und ab bewegt.

a) Der Kolbenhub, d.h. die Gesamtstrecke, die der Kolben zwischen seinem niedrigsten und seinem höchsten Punkt zurücklegt, sei 0,1 m und der Motor laufe mit 2500 Umdrehungen pro Minute. Wie größ ist die maximale Beschleunigung des Kolbens? An welchen Stellen in der periodischen Bewegung tritt die größte Beschleunigung auf?

Harmonische Bewegung: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

$\dot{x}(t) = v(t) = A \cdot \omega \cos(\omega t)$

$\ddot{x}(t) = a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$

$2A = 0{,}1\,m \Rightarrow A = 0{,}05\,m \;;\quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi \cdot 2500}{60\,s} = 262\,\frac{rad}{s}$

$a_{max} = -A\omega^2 = -0{,}05\,m \left(262\,\frac{rad}{s}\right)^2 = \pm\, 3{,}4 \cdot 10^3\, m/s$

Maximale Beschleunigung am höchsten & tiefsten Punkt.

b) Der Kolben habe eine Masse von 0,35 kg. Welche Kraft muss auf ihn am Punkt der größten Beschleunigung wirken?

$F_{max} = m \cdot a_{max} \Rightarrow F_{max} = 0{,}35\,kg \cdot 3{,}4 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$

$= 1{,}2 \cdot 10^3\, N$

c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit des Kolbens? An welcher Stelle in der periodischen Bewegung wird die größte Geschwindigkeit erreicht?

$$V_{max} = A \cdot \omega = 0{,}05\,m \cdot 262\,\frac{rad}{s} = \underline{\underline{13{,}1\,\frac{m}{s}}}$$

Maximale Geschwindigkeit beim Durchlauf durch die Kolbenmitte.

d) Wenn der Motor nun mit 5000 Umdrehungen pro Minute läuft, was sind die Antworten für die Teilaufgaben b) und c)?

$$\omega \rightarrow 2\omega$$

$$\Rightarrow F \rightarrow 4F \Rightarrow \underline{\underline{F = 4{,}8 \cdot 10^{3}\,N}}$$

$$V_{max} \rightarrow 2V_{max} \Rightarrow V_{max} = \underline{\underline{26{,}2\,\frac{m}{s}}}$$