

## Übungsblatt 8

### Besprechung in der Woche vom 18.01.2021

#### Aufgabe 1

**Luftdruck und U-Rohr.** Diese Aufgabe soll Ihnen als kleine Inspiration zum Rechnen mit Drücken dienen.

- a) Berechnen Sie die notwendige Höhe der Atmosphäre, damit der normale Luftdruck auf Meereshöhe  $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$  herrscht. Nehmen Sie die Atmosphäre dazu als inkompressible, homogene Luftmasse mit einer Dichte von  $\rho_{\text{Luft}} = 1,25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  an

**Lösung:**

Gemäß Angabe folgt für den Gewichtsdruck:

$$p_G = \rho_{\text{Luft}} \cdot g \cdot h \quad (1)$$

Dieser Druck soll nun gleich groß wie der Luftdruck auf Meereshöhe sein:

$$p_G = p_0 \rightarrow h = \frac{p_0}{\rho_{\text{Luft}} \cdot g} \approx 8261 \text{ m} \quad (2)$$

- b) In ein U-förmiges Rohr mit zwei offenen Enden wird zuerst Wasser und dann auf einer Seite Öl gefüllt (beide Flüssigkeiten vermischen sich nicht). Nach einiger Zeit stellt sich eine Gleichgewichtslage ein. Berechnen Sie die Dichte vom Öl, wenn der Höhenunterschied der beiden Enden  $\Delta h = 10,29 \text{ cm}$  und die Höhe der Ölsäule  $h_{\text{Öl}} = 33,6 \text{ cm}$  beträgt. Verwenden sie dazu folgende Skizze (Dichte von Wasser  $\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ):

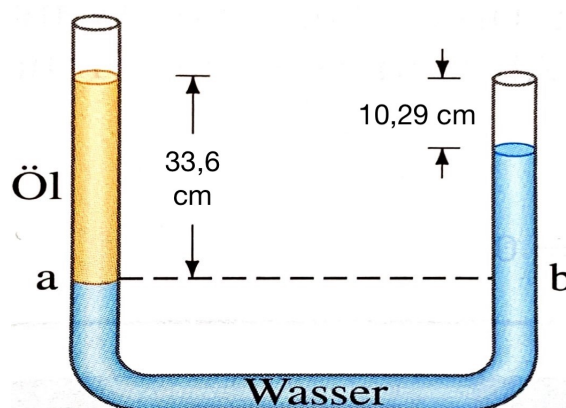


Abbildung 1: Skizze U-Rohr

**Lösung:**

Weil sich die Punkte a und b auf derselben Höhe befinden, muss der vorherrschende Druck auf beiden Seiten gleich sein. Der resultierende Druck ergibt sich aus dem Atmosphärendruck und dem Gewichtsdruck der Flüssigkeiten. Für das Gleichgewicht gilt also:

$$p_0 + p_{\ddot{O}1} = p_0 + p_{\text{Wasser}} \quad (3)$$

Daraus folgt mit  $p_{\text{Flüssigkeit}} = \rho_{\text{Flüssigkeit}} \cdot g \cdot h$  direkt:

$$\rho_{\ddot{O}1} = \frac{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot (h_{\ddot{O}1} - \Delta h)}{g \cdot h_{\ddot{O}1}} = \rho_{\text{Wasser}} \frac{(h_{\ddot{O}1} - \Delta h)}{h_{\ddot{O}1}} = 694 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4)$$

## Aufgabe 2

**Eisberg.** In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Aussage, dass nur die Spitze eines Eisberges aus dem Wasser ragt.

- a) Berechne zu wie vielen Prozent ein als Quader angenommener Eisberg aus dem Wasser ragt, wenn die Dichte von Salzwasser  $1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und jene von Eis  $920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  beträgt. Spiel die Form des Eisbergs eine Rolle?

### Lösung:

Gemäß des Archimedischen Prinzips gilt:

$$\rho_{\text{Eis}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{SW}} \cdot V' \cdot g \quad (5)$$

Wobei  $V$  das gesamte Volumen des Eisberges ist und  $V'$  das in Salzwasser eingedrungene Volumen bezeichnet. Formt man diese Gleichung auf den prozentualen Anteil des im Salzwasser befindlichen Eises um, erhält man:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{SW}}} \approx 0,898 \approx 90\% \quad (6)$$

Damit ragen lediglich 10% des Eisberges aus dem Wasser, was die Faustregel bestätigt, dass rund 90% eines Eisberges unter Wasser liegen.

Die Form des Eisberges spielt hier keine Rolle!

- b) Im Südpazifik treibt ein Riesen-Eisberg mit einer Länge  $L = 240$  km und einer Breite  $b = 40$  km. Vereinfacht hat der Eisberg die Form eines Quaders und ragt 54 m aus dem Wasser. Wie groß ist die Gesamtdicke  $d$  des Eisbergs?

$$d = \frac{54 \text{ m}}{1 - 0,898} \approx 530 \text{ m} \quad (7)$$

## Aufgabe 3

**Wassertank.** Ein Tank soll durch einen komplett mit Wasser gefüllten Schlauch geleert werden (siehe Skizze). Der Schlauch wird über ein Hindernis der Höhe  $h_2$  geleitet und endet am Punkt (3) in einer Höhe  $h_3$  unterhalb des Tankbodens. Der äußere Luftdruck sei  $p_0$ . Die Höhe des Wasserspiegels im Tank ist  $h_1$  und die Flussgeschwindigkeit im Tank sei  $v_1 = 0$ . Nehmen Sie für die folgenden Berechnungen an, dass sich Wasser wie ein ideales Fluid verhält.

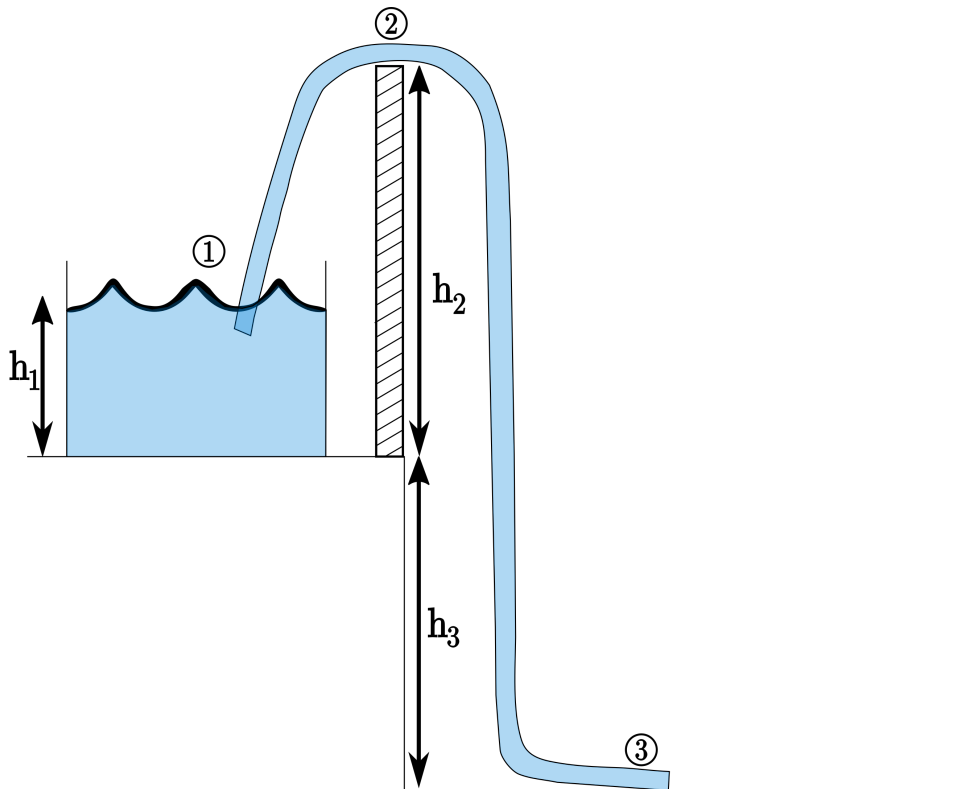


Abbildung 2: Skizze Wassertank

- a) Bestimmen Sie die Ausflussgeschwindigkeit  $v_3$ .

**Lösung:**

Wenden Sie die Bernoulli-Gleichung an:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g H_1 = p_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g H_3 \quad (8)$$

Aus der Skizze und der Angabe entnehmen wir:

$$v_1 = 0, H_1 = h_1 + h_3, H_3 = 0, p_1 = p_3 = p_0 \quad (9)$$

Unter Anwendung der Gleichung (1) folgt:

$$\Leftrightarrow p_0 + \rho g (h_1 + h_3) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow v_3 = \sqrt{2g(h_1 + h_3)} \quad (11)$$

- b) Bestimmen Sie den Druck am höchsten Punkt (2) im Schlauch.

**Lösung:**

Wenden Sie die Bernoulli-Gleichung erneut an:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g H_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g H_2 \quad (12)$$

Aus der Skizze und der Angabe entnehmen wir:

$$p_1 = p_0, H_1 = h_1 + h_3, H_2 = h_2 + h_3, v_1 = 0 \quad (13)$$

Zusätzlich wissen wir, dass  $v_2 = v_3$  gelten muss (Kontinuitätsbedingung):

Unter Anwendung der Gleichung (5) folgt:

$$\Leftrightarrow p_0 + \rho g(h_1 + h_3) = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(h_2 + h_3) \quad (14)$$

Aus a) wissen wir:  $\Leftrightarrow v_3 = \sqrt{2g(h_1 + h_3)}$  und unter Verwendung der Gleichung (7) folgt:

$$\Leftrightarrow p_2 = p_0 + \rho g(h_1 + h_3) - \rho g(h_1 + h_3) - \rho g(h_2 + h_3) = p_0 - \rho g(h_2 + h_3) \quad (15)$$

- c) Gegeben sei der konkrete Fall  $p_0 = 1\,000\text{ hPa}$ ,  $h_1 = 30\text{ m}$ ,  $h_3 = 4\text{ m}$ ,  $\rho_{\text{Wasser}} = 1\,000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und  $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Wie hoch kann dann das Hindernis maximal sein, bevor der Wasserstrahl im Schlauch abreißt?

**Lösung:**

Der Wasserstrahl reißt genau dann ab, wenn gilt:

$$p_2 \stackrel{!}{=} 0 = p_0 - \rho g(h_2 + h_3) \quad (16)$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{p_0}{\rho g} - h_3 = 6\text{ m} \quad (17)$$

#### Aufgabe 4

**Bierleitung.** In der belgischen Stadt Brügge gibt es eine 3,2 km lange Bierleitung, die die Brauerei *De Halve Maan* in der Stadtmitte mit einer Abfüllanlage außerhalb der Stadt verbindet. Pro Jahr transportiert die Bierleitung 9 Millionen Liter Bier. Wir gehen davon aus, dass die Leitung kontinuierlich betrieben wird und aus einem durchgehenden Rohr mit einem runden Querschnitt mit einem Durchmesser von 6 cm besteht. Außerdem nehmen wir an, dass Bier in den ersten vier Teilaufgaben als ideales (inkompressibles und reibungsfreies) Fluid genähert werden kann und eine Dichte von  $1050\text{ kg/m}^3$  und den typischen Preis von Wiesnbier (12 Euro/l) hat.

- a) Was ist die Volumenflussrate in der Leitung in l/s und in Euro/s?

**Lösung:**

$$Q_l = \frac{9 \cdot 10^6\text{ l}}{1\text{ a}} = 0,3\frac{\text{l}}{\text{s}} \quad (18)$$

$$Q_{\text{Euro}} = \frac{9 \cdot 10^6\text{ l}}{1\text{ a}} = 0,3\frac{\text{l}}{\text{s}} \cdot 12\frac{\text{Euro}}{\text{l}} = 3,6\frac{\text{Euro}}{\text{s}} \quad (19)$$

- b) Was ist die Flussgeschwindigkeit in der Leitung (in m/s)?

**Lösung:**

$$Q_l = A \cdot v \implies v = \frac{Q_l}{A} = 0,1\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (20)$$

- c) Wir gehen davon aus, dass der Gesamtdruck in der Leitung auf "Straßenniveau" 10 bar beträgt. An ihrer tiefsten Stelle liegt die Leitung 36 m unterhalb des "Straßenniveaus". Was ist die Fluggeschwindigkeit an dieser Stelle? Was ist der statische Druck (d.h. der Druck ohne Stau- und Schweredruck) im Rohr an dieser Stelle?

**Lösung:**

Da das Fluid inkompressibel bleibt die Fluggeschwindigkeit konstant (siehe Kontinuitätsgleichung). Nach Bernoulli ist

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh \quad (21)$$

innerhalb des Rohres konstant. Auf Strassenniveau gilt:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = p + \frac{1}{2}\rho v^2 = 10^6 \text{Pa} \quad (22)$$

Daraus folgt für den Druck am tiefsten Punkt:

$$p_t + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh_t = p + \frac{1}{2}\rho v^2 = 10^6 \text{Pa} \quad (23)$$

$$\implies p_t = 10^6 \text{Pa} - \rho gh_t - \frac{1}{2}\rho v^2 = 1,4 \cdot 10^6 \text{Pa} \quad (24)$$

Anmerkung: als Höhe muss  $-36\text{m}$  benutzt werden!

- d) Studenten des in Brügge ansässigen "College of Europe" beschließen, für eine Party die Bierleitung auf Straßenniveau anzubohren. Wie hoch spritzt das austretende Bier?

**Lösung:**

Am höchsten Punkt hat das austretende Fluid nur potentielle Energie, also ist  $p = 0$  und  $v = 0$ , daher ist

$$h_{max}\rho g = 10^6 \text{Pa} \implies h_{max} = 97,2\text{m} \quad (25)$$

Nach einiger Betriebszeit der Leitung soll die Durchflussrate wegen der hohen Nachfrage verdoppelt werden. Bei den Vorbereitungen für die Modernisierung ist den Ingenieuren aufgefallen, dass die Reibungsverluste nicht vernachlässigt werden können. Deswegen wollen wir jetzt Reibungsverluste berücksichtigen und in dieser und der nächsten Teilaufgabe davon ausgehen, dass die Bierleitung durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben wird.

- e) Wie muss die Druckdifferenz zwischen Beginn und Ende der Leitung verändert werden, um die doppelte Biermenge pro Jahr durch das gleiche Rohr zu transportieren?

**Lösung:**

Da das Bier durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschrieben wird gilt:  $Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p$  Damit muss die Druckdifferenz verdoppelt werden um einen doppelten Durchfluss zu erreichen.

- f) Welchen Durchmesser müsste man für ein neues Rohr wählen, um die doppelte Biermenge pro Jahr zu transportieren, wenn die Länge und Druckdifferenz in der Leitung nicht verändert werden sollen?

**Lösung:**

Der Radius geht mit  $r^4$  ein und alle anderen Variablen sollen konstant gehalten werden. Daher müssen wir auflösen:

$$r_{neu}^4 = 2 \cdot r_{alt}^4 \implies r_{neu} = 2^{\frac{1}{4}} r_{alt} = 3,6\text{cm} \implies d_{neu} = 7,2\text{cm} \quad (26)$$

## Aufgabe 5

**Handybarometer.** In dieser phyphox Aufgabe ist es das Ziel, die Höhendifferenz eines beliebigen Fahrstuhls (vorzugsweise jener bei der U-Bahnstation Universität) aus den Daten des Handydrucksensors zu bestimmen. Dafür nutzen Sie die fünfte Funktion unter „Sensoren“ mit dem Namen Luftdruck. Rufen Sie die eben benannte Funktion im Fahrstuhl auf und drücken Sie vor der Fahrt den Playbutton. Achten Sie dabei darauf, dass sie das Handy möglichst ruhig halten. Wenn Sie unten bzw. oben angekommen sind, drücken Sie den Pausebutton und schicken Sie sich den Datensatz. Wiederholen Sie denselben Versuch noch zweimal, um sich sicher zu sein, dass Sie richtig gemessen haben. Wählen Sie nun den 'schönsten' Datensatz aus und bestimmen Sie die Druckdifferenz von Beginn der Fahrt bis zum Ende bestmöglich. Berechnen Sie daraus den zurückgelegten Höhenunterschied. Machen Sie zudem die Annahme, dass die Dichte der Luft  $\rho_{Luft} = 1,27 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  beträgt. Denken Sie, dass die Näherung einer homogenen Luftsäule konstanter Dichte für die Atmosphäre realistisch ist?

*Hinweis:* Verwenden Sie für  $p_{min}$  und  $p_{max}$  sinnvolle Schätzungen aus Ihrem Graphen, zudem wird keine Fehlerrechnung verlangt.

### Lösung:

Messreihe und Diagramm für den Aufzug bei der U-Bahnhaltestelle Universität:

Zeit (s)	Druck (hPa)
0	959,553604
1,009037	959,558563
2,018009	959,563522
3,026811	959,564972
4,035495	959,565048
5,044088	959,573593
5,215375	959,575958
6,149232	959,57634
7,083134	959,581833
8,016577	959,587402
8,949927	959,595718
9,883249	959,624329
10,816521	959,682388
11,749742	959,768143
12,682827	959,866791
13,615868	959,968109
14,548887	960,052338
14,548987	960,113297
15,556216	960,10994
16,563510	960,113297
17,485740	960,112406

Abbildung 3: Messtabelle

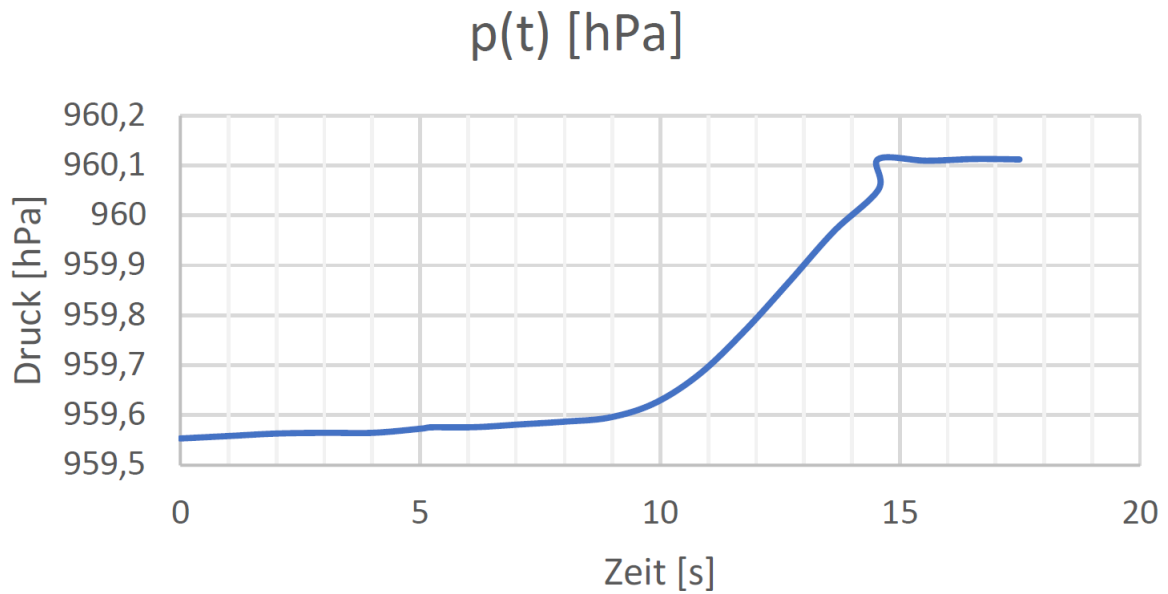


Abbildung 4: graphische Auswertung der Messtabelle

Lese aus Messtabelle:

$$\Delta p \approx p_{max} - p_{min} = 960,1 \text{ hPa} - 959,6 \text{ hPa} = 0,5 \text{ hPa} \quad (27)$$

Gemäß Vorlesung kann man die Druckdifferenz für kleine Höhenunterschiede linear nähern, somit folgt:

$$\Delta p = \rho_{Luft} \cdot g \cdot \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho_{Luft} \cdot g} \approx 4 \text{ m} \quad (28)$$

Diese Höheunterschied an der U-Bahnstation Universität scheint realistisch zu sein.

Die Näherung einer homogenen Luftsäule konstanter Dichte ist nicht realistisch. Die genauere Rechnung (die wir in dieser Veranstaltung nicht zeigen werden), ergibt die sogenannte barometrische Höhenformel, bei der der Druck exponentiell mit der Höhe abfällt:

$$p(h_1) = p(h_0) \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \cdot \Delta h}, \quad (29)$$

wobei man den Höhenunterschied  $\Delta h$ , die molare Masse  $M$ , die Gaskonstante  $R$  erhält und die Temperatur  $T$  erhält.