Lösungen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Koppelnavigation.

a) Ein Schiff bestimmt seine Position bei Sonnenuntergang durch den Stand der Sterne als (-20 km, 20 km), d.h. es befindet sich 20 km nördlich und 20 km westlich von Bremerhaven. Dann fährt es 100 Minuten lang mit einem Kurs direkt nach Norden mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h. Was ist seine Position 100 Minuten nach Sonnenuntergang?
Lösung:
Die Position des Schiffes lässt sich mit

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

berechnen. Mit $v = 12$ km/h und $\Delta t = 100$ min ergibt sich eine Strecke von 20 km (in Richtung Norden). Die neue Position des Schiffes ist also die alte Position addiert mit der zurückgelegten Strecke (0 km, 20 km), so dass die neue Position (-20 km, 40 km) ist (siehe Positionen 1 und 2 in der Skizze unten).

b) Jetzt ändert der Kapitän den Kurs auf Nordwest und das Schiff fährt weitere 2 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 14,14 km/h. Was ist dann die Position des Schiffes?
Lösung:
Da das Schiff nach Nordwest fährt, müssen die Geschwindigkeitskomponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v} = \binom{v_n}{v_w}$ jeweils den gleichen Wert haben. Da das Betragsquadrat die Gesamtgeschwindigkeit des Schiffes angibt, lassen sich die Beträge der Komponenten des Vektors berechnen

$$\sqrt{v_n^2 + v_w^2} = 14,14 \text{ km/h}$$

$$v_n = v_w = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (14,14 \text{ km/h})^2} \approx 10,0 \text{ km/h}$$

Damit bewegt sich das Schiff zwei Stunden mit 10,0 km/h nach Norden und nach Westen, das sind jeweils $\Delta s = 10,0 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ h} = 20$ km. Die neue Position ist somit (-40 km, 60km). Siehe Position 3 in der Skizze unten.

c) Welchen Kurs muss das Schiff einschlagen, um von seiner Position (Position aus b)) auf direktem Wege nach Helgoland zu fahren? Helgoland befindet sich bei (-40 km, 70 km), d.h. 70 km nördlich und 40 km westlich von Bremerhaven.
Lösung:
Es muss eine Kurs direkt nach Norden einschlagen, denn die westliche Position ist bereits bei 40km.

d) Wann erreicht das Schiff Helgoland mit dem in der letzten Teilaufgabe errechneten Kurs, wenn es mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h fährt?
Lösung:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{10 \text{ km}}{20 \text{km/h}} = 0.5 \text{ h}$$

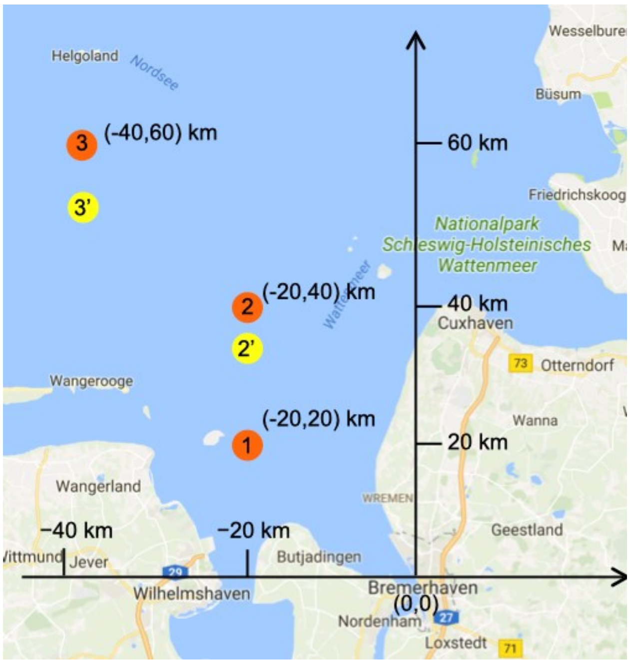

Abbildung 1: Skizze der Schiffspositionen in Aufgabe 1.

e) Wie ändern sich die Antworten der Teilaufgaben a) und b), wenn während der ganzen Nacht eine Strömung von 2 km/h in südlicher Richtung herrscht. Beachte, dass die Geschwindigkeitsmessungen des Schiffes relativ zum Wasser sind!
Lösung:
Der Rechenweg ist derselbe, nur muss von allen nördlichen Geschwindigkeitskomponenten 2 km/h abgezogen werden. Die westliche bleibt dieselbe. Damit ergibt sich bei a) (-20 km, 36,7 km) und bei b) (-40 km, 52,7 km). Siehe die gelben Positionen 2' und 3' in der Skizze unten.

Aufgabe 2

Die Atwood'sche Fallmaschine.

a) Zeigen Sie mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms, dass für die Zugkraft im Seil gilt:

$$F_S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{1}$$

Lösung:
Auf die Massen wirkt einerseits die Schwerkraft und ihr entgegen die Kraft des Seils. Das zweite Newton'sche Axiom $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ kann nun auf beide Massen angewandt werden. Es ergeben sich zwei Gleichungen mit der Seilkraft F_S und der Beschleunigung a im Betrag

$$F_S - m_2 g = m_2 a_2 \qquad \text{und} \qquad F_S - m_1 g = m_1 a_1$$

wobei $a_2 = -a_1 = a$ ist, da die beiden Massen mit einem Seil verbunden sind. Damit ergibt sich

$$F_S - m_2 g = m_2 a \qquad \text{und} \qquad m_1 g - F_S = m_1 a$$

Nun können diese zwei Gleichungen addiert werden und man erhält

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

Nun kann man die Gleichung nach a umstellen

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Diesen neuen Ausdruck für die Beschleunigung kann man nun in eine der beiden Startgleichungen einsetzen und man erhält schließlich

$$F_S = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

b) Liefert diese Gleichung für den Fall $m_1 = m_2$, sowie für die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \ll m_2$ ein sinnvolles Ergebnis?

Lösung:
Ist $m_1 = m_2$, so ergibt sich für die Zugkraft logischerweise

$$F_S = mg$$

Die beide Massen bleiben in Ruhe und stehen im Gleichgewicht der Kräfte. Die Zugkraft entspricht der Schwerkraft.

Nun zum Grenzfall $m_1 \ll m_2$: Es ist hilfreich die Gleichung für die Beschleunigung und Zugkraft umzuformen, also m_2 im Nenner auszuklammern

$$a = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} g \qquad F_S = \frac{2 m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} g$$

Für diesen Grenzfall folgt dann

$$a = -g \qquad F_S = 2 m_1 g$$

Man kann Masse 2 direkt vernachlässigen und Masse 1 ist im freien Fall. Daher muss ein Teil der Zugkraft zuerst die Schwerkraft der Masse 1 kompensieren und ein anderer Teil muss die Bewegung des freien Falls der Masse 1 entgegensetzen. Deswegen ist die Zugkraft gleich zwei mal der Schwerkraft.

Für den Fall $m_1 \gg m_2$ kann man wieder die Gleichungen umformen und m_1 ausklammern, es folgt

$$a = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} g \qquad F_S = \frac{2 m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} g$$

Daraus folgt dann

$$a = g \qquad F_S = 2 m_2 g$$

Die Interpretation analog wie der Fall $m_1 \ll m_2$.

c) Es sei eine der beiden Massen 2,4 kg. Welche Masse muss das andere Gewicht haben, damit der Betrag der Verschiebung relativ gesehen in der ersten Sekunde nach dem Loslassen 0,6 m beträgt?
Hinweis: Nehmen Sie eine gleichförmige Beschleunigung beider Massen in y- Richtung an.

Lösung:
Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir, dass sich die Beschleunigung formulieren lässt als

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Dies lässt sich auflösen nach einer der beiden Massen zu

$$m_1 = m_2(\frac{g+a}{g-a})$$

Nun kann die Gleichung für die gleichförmige Beschleunigung benutzt werden mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

Nun können wir auflösen und einsetzen. Für die Beschleunigung erhält man dann

$$a = \frac{2\Delta y}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \cdot (0,6 \text{ m})}{(1 \text{ s})^2} = 1,2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Nun können wir unsere Beschleunigung in die vorherige Gleichung einsetzen und man erhält

$$m_1 = m_2(\frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} + 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{9,81 \text{ m} \cdot s^{-2} - 1,2 \text{ m} \cdot s^{-2}}) \approx 1,28 \cdot m_2$$

Ist $m_1 = 2,4\,\text{kg}$, dann ist $m_2 = 1,875\,\text{kg}$. Natürlich lassen sich die beiden Massen auch vertauschen, ohne dass sich die Physik des Problems ändert. Dann ist $m_2 = 1.28 \cdot m_1$, also ungefähr 3.07 kg schwer. Dies würde einfach bedeuten, dass sich die Massen in die jeweils andere Richtung bewegen.

Aufgabe 3

Kugelstoßen.

a) Angenommen es wirkt immer die gleiche Kraft auf die Kugel wirkt, sodass sie immer mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0 losfliegt. Unter welchem Stoßwinkel θ kann Popeye die Kugel am weitesten stoßen)? *Hinweis: Sie können hier die Herleitung aus der Vorlesung benutzen.*

Lösung:
Diese Lösung ist analog zu der Herleitung der Vorlesung. Wir formulieren die Anfangsgeschwindigkeit abhängig von unserem Stoßwinkel θ jeweils in x und in y Richtung

$$v_{0,x} = v_0 \cdot \cos(\theta) \qquad v_{0,y} = v_0 \cdot \sin(\theta)$$

Unsere Anfangsbedingungen für den Stoß sind $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und $t = 0$. Für die Bewegung in y gilt

$$y = v_0 \sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Nun ermitteln wir den Punkt, an dem die Kugel auf dem Boden auftrifft, dies geschieht bei $y = 0$. Für die Zeit folgt dann

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

Für die Strecken in x Richtung gilt

$$x = v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot t$$

Nun können wir unsere Zeit t einsetzen, bei der die Kugel auftrifft, es folgt

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Mit der der Identität $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ folgt schließlich

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

Die Distanz wird maximal, wenn der Sinus maximal wird. Dies ist der Fall für $2\theta = 90°$, also ist $\theta = 45°$ der Stoßwinkel, mit dem die Reichweite maximal wird.

b) Wir gehen nun davon aus, dass das die Kugel in einem Winkel von $\theta = 45°$ gestoßen wird. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss die Kugel Popeyes Hand verlassen, um die Reichweite von 24 m zu erreichen?
Lösung:
Die Entfernung lässt sich mithilfe des Winkels und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 formulieren als

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\theta)$$

Umstellen liefert

$$v_0 = \sqrt{d \cdot g \cdot \frac{1}{\sin(2\theta)}}$$

Nach einfachen Einsetzen erhält man schließlich

$$v_0 = 15.34\frac{m}{s}$$

c) Welche maximale Höhe erreicht die Kugel aus der letzten Teilaufgabe? Vergleichen Sie diese Höhe mit einer geeigeneten Bezugsgröße (z.B. Körpergröße).

Lösung:
Die Höhe kann formuliert werden als

$$y = v_0 \cdot \sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

y muss maximal werden das heiß t, das Extremum ist gesucht

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin(\theta) - g \cdot t = 0$$

Umstellen liefert

$$t^* = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

Das t^* bezeichnet nun das Extremum, dies muss wieder eingesetzt werden in die Ausgangsgleichung, um eine Gleichung für die maximale Höhe zu bekommen

$$y(t^*) = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta) v_0 \cdot \sin(\theta)}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{g^2}$$

Vereinfachen und Einsetzen liefert schließlich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{g} = 6,0 \text{ m}$$

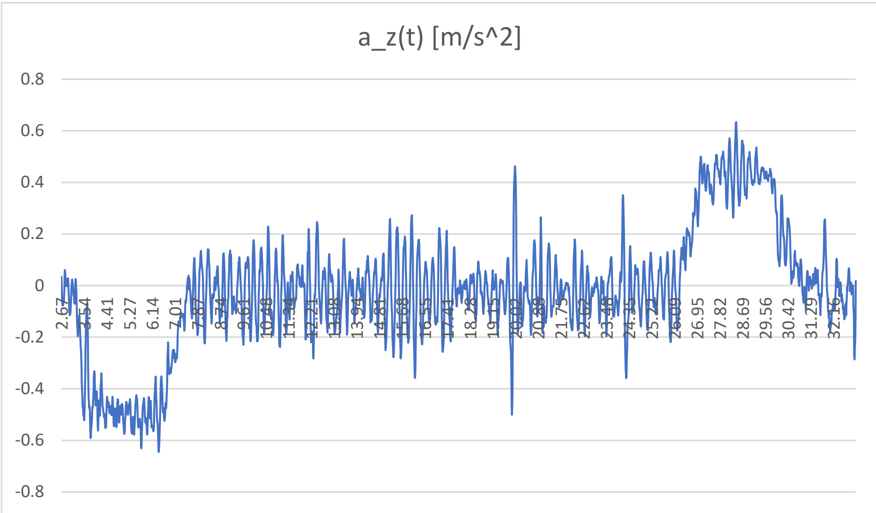

Abbildung 2: Beschleunigung während einer Fahrstuhlfahrt

d) Wie lange fliegt die Kugel, bis sie auf den Boden auftrifft?

Lösung:
Wir hatten bereits ausgerechnet:

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

Einsetzen liefert

$$\frac{2 \cdot 15,34\frac{m}{s} \cdot \sin(45°)}{9,81\ \frac{m}{s^2}} \approx 2,21\ \mathrm{s}$$

Aufgabe 4

Fahrt im Fahrstuhl (oder Squats).
Beispiellösung:
Diskussion der Ergebnisse:

1. Die Beschleunigungs- und Bremsphase sind jeweils eindeutig in den Daten zu erkennen und haben ein quasi identisches Profil. Die Fahrt war nach unten (negative Beschleunigung zuerst).
2. Geschwindigkeit ist mit ca. 2 m/s für einen Fahrstuhl in einem Hochhaus plausibel (bis zu 2,5 m/s). Es ist eindeutig eine Drift in den Daten zu sehen, der Fahrstuhl kommt am Ende der Fahrt (scheinbar) nicht zum Stehen. Vermutlich gibt es einen konstanten Offset in der Beschleunigungsmessung.
3. Ein Höhenunterschied von ca. 50 m ist für eine Fahrt über 15 Stockwerke plausibel. In der Realität müsste man auch hier für den Offset korrigieren.

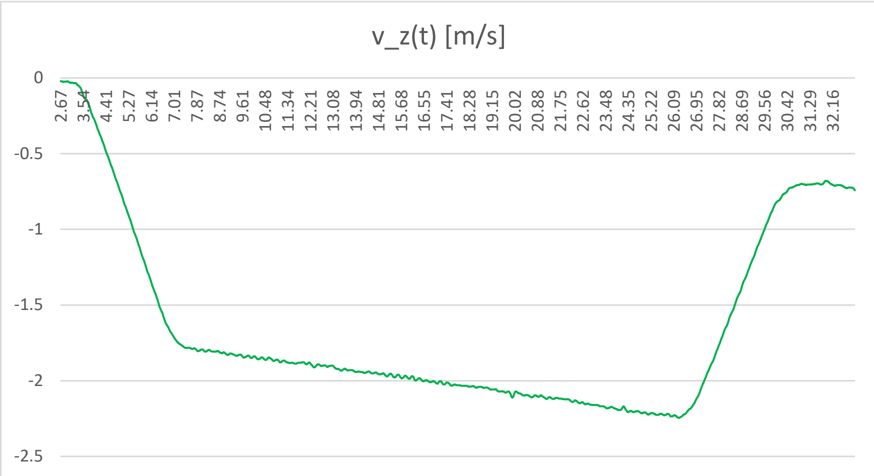

Abbildung 3: Geschwindigkeit während einer Fahrstuhlfahrt

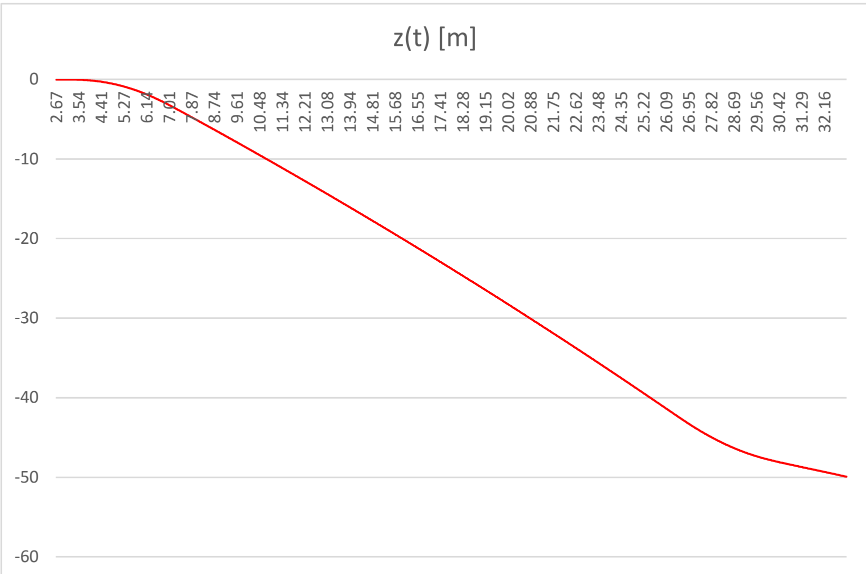

Abbildung 4: Position während einer Fahrstuhlfahrt