Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Statistik mit Hunden.

a) Was sind die Mittelwerte der Massen der beiden Hunderassen? Welche Hunderasse ist im Mittel schwerer?

Lösung:
Der Mittelwert berechnet sich aus den einzelnen Massenangaben m_i als

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\mu_G = \frac{1}{6}\cdot(24\,\mathrm{kg} + 33\,\mathrm{kg} + 32\,\mathrm{kg} + 28\,\mathrm{kg} + 35\,\mathrm{kg} + 25\,\mathrm{kg}) = 29,5\,\mathrm{kg}$$

$$\mu_L = \frac{1}{7}\cdot(34\,\mathrm{kg} + 29\,\mathrm{kg} + 33\,\mathrm{kg} + 32\,\mathrm{kg} + 27\,\mathrm{kg} + 30\,\mathrm{kg} + 25\,\mathrm{kg}) = 30,0\,\mathrm{kg}$$

Golden Retriever: μ_G = 29,5 kg; Labrador: μ_L = 30,0 kg.
Da $\mu_L > \mu_G$ sind die Labradore im Mittel schwerer.

b) Berechnen Sie die Standardabweichungen der Massen beider Hunderassen, um die Variabilität der Populationen zu charakterisieren.

Lösung:
Die Standardabweichung berechnet sich aus den einzelnen Massenangaben m_i als

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(m_i - \mu)^2}$$

Golden Retriever: $\sigma_G \approx 4,5\,\mathrm{kg}$; Labrador: $\sigma_L \approx 3,3\,\mathrm{kg}$;

c) Berechnen Sie die Stichprobenfehler ("standard error of the mean") der Massen beider Hunderassen, um abzuschätzen, wie präzise die Mittelwerte der Populationen durch die Daten bestimmt sind. ?

Lösung:
Der Stichprobenfehler berechnet sich als

$$sem = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Golden Retriever: $sem_G \approx 1,8\,\mathrm{kg}$; Labrador: $sem_L \approx 1,2\,\mathrm{kg}$.

Wie würde sich das Ergebnis ändern, wenn Sie für beide Hunderassen jeweils $N = 100$ Hunde gemessen hätten (bei gleichen Werten für Mittelwert und Standardabweichung)?

Lösung:
Der Stichprobenfehler wäre dann wesentlich kleiner, durch die $1/\sqrt{N}$ Abhängigkeit. Konkret wäre $sem_G = 0{,}45$ kg und $sem_L = 0{,}33$ kg;

Aufgabe 2

Fehlerrechnung im Schwimmbad.

a) Berechnen Sie die Grundfläche des Schwimmbeckens (d.h. die Bodenfläche) für die in Auftrag gegebenen Abmessungen und die zu erwartenden Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung. Was ist der zu erwartenden relative Fehler?

Lösung:
Die Grundfläche des Schwimmbeckens berechnet sich über die Formel:

$A = l \cdot b = 50\,\mathrm{m} \cdot 15\,\mathrm{m} = 750\,\mathrm{m}^2$

Die in Auftrag gegebene Grundfläche des Schwimmbeckens beträgt also $750\,\mathrm{m}^2$. Wie in der Aufgabenstellung beschrieben, haben sowohl die Länge als auch die Breite des Beckens statistisch verteilte Fehler, welche bei beiden Größen unabhängig voneinander sind. Folglich können wir den zu erwartenden Fehler für die Abmessung der Grundfläche mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnen:

Vorlesung 2, Folie 10:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i})^2}$$

In unserem Fall ist die Funktion f die Fläche A.

$$\Delta A = \sqrt{(\frac{\partial A}{\partial l} \cdot \Delta l)^2 + (\frac{\partial A}{\partial b} \cdot \Delta b)^2}$$

;

$$\frac{\partial A}{\partial l} = \frac{\partial (l \cdot b)}{\partial l} = b$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial (l \cdot b)}{\partial b} = l$$

$$\rightarrow \Delta A = \sqrt{(b \cdot \Delta l)^2 + (l \cdot \Delta b)^2} = \sqrt{(15\,\mathrm{m} \cdot 0,4\,\mathrm{m})^2 + (50\,\mathrm{m} \cdot 0,2\,\mathrm{m})^2} \approx 11,7\,\mathrm{m}^2$$

Relativer Fehler:

$$\frac{\sigma_A}{A} = \frac{11,7\,\mathrm{m}^2}{750\,\mathrm{m}^2} \approx 0,016$$

b) Berechnen Sie das Volumen des Schwimmbeckens für die in Auftrag gegebenen Abmessungen und die zu erwartenden Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung. Was ist der zu erwartende relative Fehler?

Lösung:

Das Volumen des Schwimmbeckens berechnet sich über die Formel:

$V = l \cdot b \cdot h = 50\,\mathrm{m} \cdot 15\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 1500\,\mathrm{m}^3$

Das in Auftrag gegebene Volumen des Schwimmbeckens beträgt also $1500\,\mathrm{m}^3$. Wie in der Aufgabenstellung beschrieben, haben sowohl die Länge als auch die Breite und die Höhe des Beckens statistisch verteilte Fehler, welche bei allen drei Größen unabhängig voneinander sind. Folglich können wir den zu erwartenden Fehler für die Abmessung des Volumens mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnen

$$\Delta V = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial l} \cdot \Delta l)^2 + (\frac{\partial V}{\partial b} \cdot \Delta b)^2 + (\frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial(l \cdot b \cdot h)}{\partial l} = b \cdot h$$
$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{\partial(l \cdot b \cdot h)}{\partial b} = l \cdot h$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial(l \cdot b \cdot h)}{\partial h} = l \cdot b$$

$$\rightarrow \Delta V = \sqrt{(b \cdot h \cdot \Delta l)^2 + (l \cdot h \cdot \Delta b)^2 + (l \cdot b \cdot \Delta h)^2} =$$

$$= \sqrt{(15\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 0,4\,\mathrm{m})^2 + (50\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 0,2\,\mathrm{m})^2 + (50\,\mathrm{m} \cdot 15\,\mathrm{m} \cdot 0,1\,\mathrm{m})^2} \approx 78,5\,\mathrm{m}^3$$

Relativer Fehler:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \frac{78,5\,\mathrm{m}^2}{1500\,\mathrm{m}^2} \approx 0,052$$

c) Als das Becken endlich fertig ist, schwimmt die neue Besitzerin 10 Bahnen in ihrem neuen Schwimmbecken, mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s ± 0,1 m/s. Wie groß ist die statistische Unsicherheit (d.h. der Messfehler) für die Zeit, die sie für die 10 Bahnen braucht? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn das Becken exakt 50,0 m lang ist?

Lösung:
Auch für den letzten Teil der Aufgabe wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zur Fehlerberechnung benutzt. Die Zeit, die die Schwimmerin für zehn Bahnen benötigt, berechnet sich über die Formel:

$$t = \frac{10 \cdot l}{v}$$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta t = \sqrt{(\frac{\partial t}{\partial l} \cdot \Delta l)^2 + (\frac{\partial t}{\partial v} \cdot \Delta v)^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial(\frac{10 \cdot l}{v})}{\partial l} = \frac{10}{v}$$

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial(\frac{10 \cdot l}{v})}{\partial v} = -\frac{10 \cdot l}{v^2}$$

$$\rightarrow \Delta t = \sqrt{(\frac{10}{v} \cdot \Delta l)^2 + (-\frac{10 \cdot l}{v^2} \cdot \Delta v)^2} = \sqrt{(\frac{10}{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot 0,4\,\mathrm{m})^2 + (\frac{-10 \cdot 50\,\mathrm{m}}{(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \cdot 0,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \approx 50,2\,\mathrm{s}$$

Zuletzt soll noch der Fehler für den Fall, dass die Länge des Swimmingpools exakt 50,0 m beträgt berechnet werden. Das bedeutet, dass in unserer Gaußschen Fehlerfortpflanzung nur noch eine fehlerbehaftete Variable , die Geschwindigkeit, berücksichtigt werden muss:

$$\Delta t = \sqrt{(\frac{\partial t}{\partial v} \cdot \Delta v)^2}$$

$$\rightarrow \Delta t = \sqrt{(-\frac{10 \cdot l}{v^2} \cdot \Delta v)^2} = \sqrt{(\frac{-10 \cdot 50\,\mathrm{m}}{(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \cdot 0,1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} = 50,0\,\mathrm{s}$$

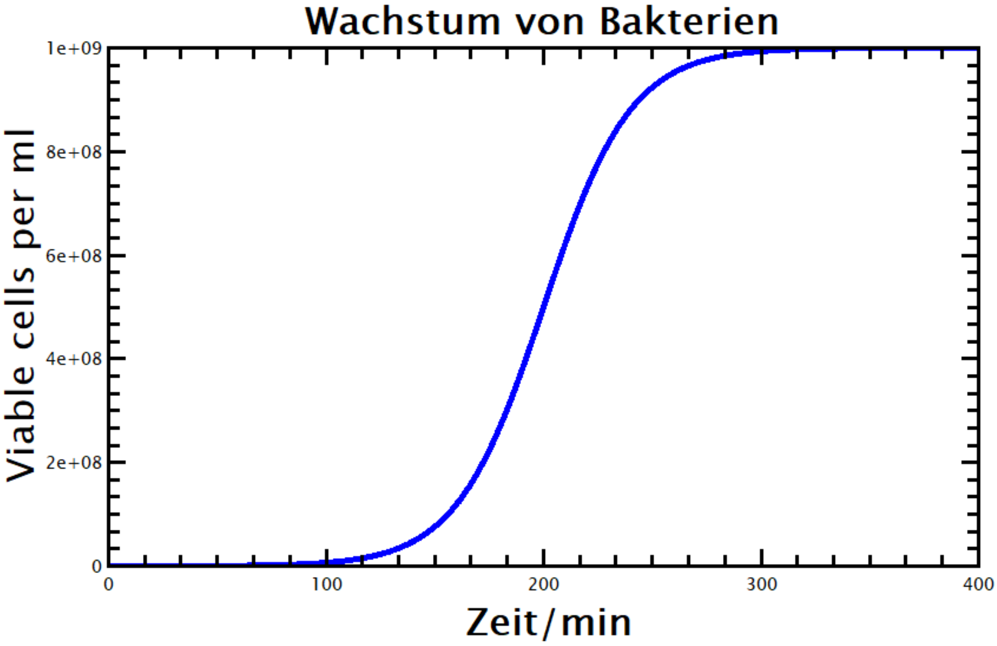
Aufgabe 3

Fehlerrechnung und Bakterien.

a) Zeichnen Sie den Zusammenhang von Anzahl der Bakterien in einem Milliliter Nährlösung n (in Anzahl pro ml) als Funktion der Zeit (in Min) für die oben beschriebene Bakterienpopulation. Es sollten hier mindestens 400 Minuten berücksichtigt werden.

Lösung:

Eine graphische Darstellung ist unten gezeigt. Man sieht, dass das Wachstum von Bakterien bei wenig vergangener Zeit klein und fast konstant ist (Verzögerungswachstumsphase). Im Gegensatz dazu steigt das Wachstum mit zunehmender Zeit schnell exponentiell an (exponentielle Wachstumsphase). Nach genügend vergangener Zeit nimmt das Wachstum wieder ab und die Bakterienpopulation bleibt nahezu konstant (stationäre Wachstumsphase).



b) Sie haben während Sie die Population zum Wachsen angesetzt haben nicht auf die Zeit geachtet, da Sie mit einem Mitarbeiter gequatscht haben. Ein Blick auf die Uhr sagt Ihnen, dass Sie ungefähr vor $t = 45$ Min $\pm$ 5 Min angefangen haben. Wie groß ist momentan Ihre Bakterienpopulation und der Messfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung?

Lösung:

Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ist der Fehler in der Bakterienanzahl gegeben durch den Fehler in der Zeit multipliziert mit der Ableitung des funktionellen Zusammenhangs zwischen Anzahl der Bakterien und Zeit, evaluiert für die jeweils benötigte Zeit. Berechne zunächst die Ableitung von $n(t)$

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{Lke^{-k(t-t_0)}}{(1+e^{-k(t-t_0)})^2}$$

Da wir nur den Fehler der Zeit berücksichtigen, ist direkt

$$\sigma_n = \frac{\partial n(t)}{\partial t} \cdot \sigma_t = \frac{Lke^{-k(t-t_0)}}{(1+e^{-k(t-t_0)})^2} \cdot \sigma_t$$

Einsetzen von $t = 45$ Min und $\sigma_t = 5$ Min ergibt n(t) $= (4,3 \pm 1,1) \cdot 10^5$ Bakterien.

c) Sie haben nachdem Sie eine weitere Population zum Wachsen angesetzt haben eine Stoppuhr angemacht und sind mit einem Blick auf die Uhr zum Mittagessen gegangen. Als Sie wieder kommen ist die Stoppuhr leider ausgegangen. Sie wissen aber, dass Sie ungefähr vor $t = 180$ Min $\pm$ 5 Min angefangen haben. Wie groß ist momentan Ihre Bakterienpopulation und der Messfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung?

Lösung:

Gleiche Rechnung wie in der letzten Teilaufgabe. Einsetzen von $t = 180$ Min und $\sigma_t = 5$ Min ergibt n(t) = $(27 \pm 5) \cdot 10^7$ Bakterien.

d) Warum sind die Messfehler für die Bakterienpopulationen in den letzten zwei Teilaufgaben so unterschiedlich, obwohl die Fehler in der Zeitmessung identisch sind?

Lösung:

Der entscheidende Punkt ist, dass der Fehler der "Input Variable" (t in unserem Fall) in der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mit der Ableitung der Funktion, die die gewünschte Messgröße angibt, an der Stelle, für die der Messwert berechnet werden soll, multipliziert wird. Konkret in unserem Fall ist $n(t)$ nach einer kurzen Inkubationszeit fast konstant ; da sich $n(t)$ nach kurzen Inkubationszeiten kaum mit t ändert (mit anderen Worten: da die Ableitung fast Null ist), führt ein Fehler in t kaum zu einem Fehler in $n(t)$. Im Gegensatz dazu steigt $n(t)$ nach langen Inkubationszeiten exponentiell an, d.h. die Ableitung ist groß, und selbst ein kleiner Fehler in t führt zu einem großen Fehler in $n(t)$.

Aufgabe 4

Umrechnung von Einheiten

a) Die astronomische Einheit (AE) entspricht der mittleren Entfernung zwischen der Erde und der Sonne, also ungefähr $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $3 \cdot 10^8$ m/s. Drücken Sie die Lichtgeschwindigkeit in astronomischen Einheiten pro Minute aus.

Lösung:

$$1 \text{ AE} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$
$$c = 3 \cdot 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \cdot 60 \, \frac{\text{m}}{\text{min}} = 3 \cdot 10^8 \cdot 60 \cdot \frac{1}{1,50 \cdot 10^{11}} \, \frac{\text{AE}}{\text{min}} = 0,12 \, \frac{\text{AE}}{\text{min}}$$

b) Wie lange braucht das Licht von der Sonne bis zur Erde?

Lösung:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

mit $s = 1$ AE, und $v = c = 0,12 \, \frac{\text{AE}}{\text{min}}$ folgt:

$$t = \frac{1 \text{ AE}}{0,12 \, \frac{\text{AE}}{\text{min}}} = 8\frac{1}{3} \text{ min} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$$

.

c) Ein Lichtjahr (Lj) beschreibt die Entfernung, die das Licht innerhalb eines Jahres zurücklegt. Berechnen sie die Entfernung von der Erde zur Sonne in Lichtjahren.

Lösung:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow s = v \cdot t$$

$$\Rightarrow 1 \text{ Lj} = c \cdot 1 \text{ a} = 3 \cdot 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \, \text{s} \approx 9{,}5 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

$\Rightarrow$ Strecke von der Sonne zur Erde $= \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{9{,}5 \cdot 10^{15}}$ Lj $\approx 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ Lj

d) Eine Bartsekunde (BS) gibt die Länge an, die eine Barthaar in einer Sekunde Wächst. Eine Bartsekunde einspricht 5 nm. Geben sie die Geschwindigkeit einer Schnecke ($v_{Schnecke} \approx 3$ m/h) in Bartsekunden pro Millisekunde an.

Lösung:

$$v_{Schnecke} \approx 3 \, \frac{\text{m}}{\text{h}} = 3 \cdot \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 10^3} \, \frac{\text{m}}{\text{ms}} = 3 \cdot \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 10^9 \, \frac{\text{BS}}{\text{ms}} \approx 167 \, \frac{\text{BS}}{\text{ms}}$$