Lösungen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Energiegehalt. Der Energiegehalt vom Big Mac ist 2106 kJ, was ca. 512 kcal entspricht. Somit decken 4 Big Mac den ungefähren Tagesbedarf eines Menschen (2000 kcal). Die allgemeine Formel für die potentielle Energie berechnet sich mit folgender Formel.

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \tag{1}$$

a) Die zurückzulegende Höhe ist durch h = (1838 m - 792 m) = 1046 m gegeben.
Damit ergibt sich für die Energie $E_{pot} = 70kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2} \cdot 1046$ m $= 718288,2J \approx 718,3$ kJ.
Somit entsprechen 3 Bergbesteigungen ungefähr einem Big Mac.

b) Der ungefähre Höhenunterschied bei einer Liegestütze beträgt 40 cm. Dadurch ergibt sich die potentielle Energie für 100 Liegestützen zu:

$$E_{pot} = 70 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 100 = 27468 \text{ J} = 27,47 \text{ kJ}$$

Damit ensptechen ungefähr 7500 Liegestütze einem Big Mac.

c) Bei beiden Teilaufgaben wurde die Reibung vernachlässigt (z.B. die Reibung von Schuh und Berg). Die Umwandlung von Energie im Stoffwechsel (Atmung, Kreislauf, Muskelkontraktionen) ist nicht 100% effizient, sondern es gibt dort erhebliche Verluste, die z.B. über Wärme abgegeben werden.

Aufgabe 2

Satelliten-Umlaufbahn.

a) Für eine stabile, kreisförmige Umlaufbahn gilt:

$$F_{Gravitation} = F_{Zentripetal}$$
$$\frac{G \cdot m_E \cdot m_S}{r^2} = \frac{m_S v^2}{r} = m_S \ w^2 \ r$$
$$G \cdot m_E = \omega^2 r^3$$
$$\text{Nutze } \omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$G \cdot m_E = \frac{(2\pi)^2}{T} \cdot r^3 \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G m_E}}$$

b) Einsetzen der Werte ergibt

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (500.000 \text{ m} + 6400.000 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 5706,94 \text{ s} \approx 95 \text{ min}$$

c) Wir nehmen die einfache Geschwindigkeitsgleichung mit

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{2}$$

Und wir erhalten

$$v = \frac{2\pi(6400 + 500)10^3 m}{5706,94 s} = 7597 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

d) Nein die Masse spielt keine Rolle, da sich die Satellitenmasse aus der Gleichgewichtsbedingung (Teil a)) weggekürzt hat.

Aufgabe 3

Bungee-Jump.

a) Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $x_0 = 0, v_0 = 0, a = g$.
Allgemein gilt:
$v(t) = a \cdot t + v_0$ und $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$
Daraus folgt: $t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \rightarrow v = \sqrt{2xa}$
Einsetzen ergibt: $v = \sqrt{2 \cdot 50m \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 31,3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

b) Betrachte die Energieerhaltung oben auf der Brücke mit $E_{kin} = 0, E_{Feder} = 0, E_{pot} = mgh$.
Unten über dem Wasser ergibt sich: $E_{kin} = 0, E_{Feder} = \frac{1}{2} kx^2, E_{pot} = 0$
Energien gleichsetzen ergibt folgenden Ausdruck:
$mgh = \frac{1}{2} k(h-x)^2$
und Einsetzen und Umstellen ergibt $k = \frac{2mgh}{(h-x)^2} = \frac{2 \cdot 75\mathrm{kg} \cdot 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 190\mathrm{m}}{(140\mathrm{m})^2} = 14,26 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

c) Es wirken F_{Feder} und F_G, woraus folgt:
$F_{Ges} = F_{Feder} + F_G = -kx_2 + mg =$ - 14,26 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot$ 140 m + 75 kg $\cdot$ 9,81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ = - 1260,7 N
Das heißt die Kraft wirkt nach oben.
Allgemein haben wir:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} \rightarrow a = \frac{-\ 1260{,}7\ \mathrm{N}}{75\ \mathrm{kg}} = -\ 16{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

d) In Abbildung eins ist die Geschwindigkeit des Springers als Funktion der Zeit aufgetragen.

Aufgabe 4

Mondlandung.

a) In der Vorlesung wurde der Energiesatz der Mechanik verwendet:
$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$ bei r = ∞ und es gilt : $E_{mech} = 0$. Bei $r = R_{Erde}$:

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} mv^2 + \big(- G \frac{M \cdot m}{R_{Erde}} \big) = 0 \tag{3}$$

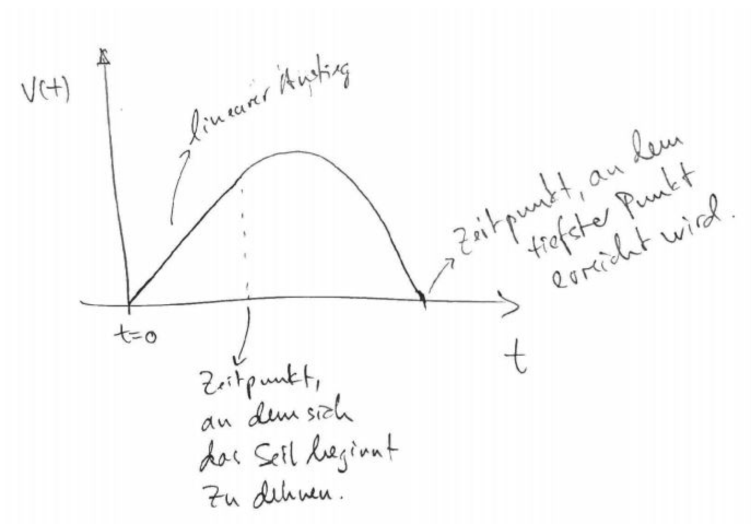

Abbildung 1: Skizze der Geschwindigkeit des Springers als Funktion der Zeit.

Daraus ergibt sich für die Fluchtgeschwindigkeit:

$$v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2 \cdot GM_{Erde}}{R_{Erde}}} = v_{Flucht,Erde} = 11{,}2\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

b) Wir wenden den Energiesatz der Mechanik an: $\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$
Für Hammer und Feder gilt:
vorher: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$ da $v_0 = 0$ und
nachher: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$; wobei v die Enggeschwindigkeit kurz vor dem Aufschlag ist.
Für den Hammer und die Feder gilt:

$$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h \text{ wobei } \Delta h > 0$$

$$\rightarrow \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - m \cdot g|\Delta h| = 0 \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot |\Delta h|}$$

Dies entspricht der Geschwindigkeit nach gleichmäßig beschleunigter Bewegung über eine Strecke $|\Delta h|$ mit der Beschleunigung g.

c) Wir verwenden die Formel aus Aufgabe 4a): $v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2 \cdot GM_{Mond}}{R_{Mond}}}$
Einsetzen ergibt:

$$v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} 7,346 \cdot 10^{22}\mathrm{kg}}{1737\mathrm{km}}} = 2,376\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$