Übungsblatt 4
Besprechung in der Woche vom 30.11.2020

Aufgabe 1

Lauberhorn Abfahrt: Die Lauberhorn Abfahrt in Wengen (Schweiz) stellt für die Ski-Weltcup Teilnehmer*innen jedes Jahr eine erneute Herausforderung dar. Auf fast 4.5 Kilometern erreichen die Sportler*innen eine der höchsten Durchschnittsgeschwindigkeiten. In dieser Aufgabe werden wir diese Skiabfahrt mit vereinfachenden Annahmen untersuchen. Im folgenden sei angenommen, dass die Piste insgesamt eine Länge von 4430 m und ein durchschnittliches Gefälle von 16.7° aufweist.

a) Bestimme die durchschnittliche Beschleunigung entlang der Lauberhorn Abfahrt unter der Vernachlässigung von Reibungseffekten und der Annahme, dass der Skifahrer sich zu Beginn in Ruhe befindet.

b) Ein waghalsiger Skifahrer möchte das Rennen unbedingt gewinnen. Aus diesem Grund bremst er während der gesamten Abfahrt bis zum Ziel nicht ab. Unter der Berücksichtigung des Gleitreibungskoeffizienten $\mu_g = 0.03$ des Ski's, bestimme die Geschwindigkeit des Skifahrers am Ende der Piste. Beurteile dein Ergebnis.

c) An einer Schlüsselstelle der Lauberhorn Abfahrt beträgt das Gefälle $22,78°$. Bestimme unter Berücksichtigung des Luftwiderstands $F_L = \frac{1}{2} c_W \rho_L A v^2$ die maximale Geschwindigkeit welche an dieser Stelle erreicht werden kann. (Unter der Annahme dass die Schlüsselstelle lang genug ist um diese zu erreichen). Folgende Werte können angenommen werden:
Luftdichte $\rho_l = 1,25 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3}$
Masse des Skifahrers $m = 85\mathrm{kg}$
Widerstandsbeiwert $c_W = 1,2$
Angeströmte Fläche $A = 0,4\mathrm{m}^2$

Lösung:
a) Aus Abbildung 1 entnehmen wir: Die Kraft, die den Skifahrer entlang der Piste beschleunigt,

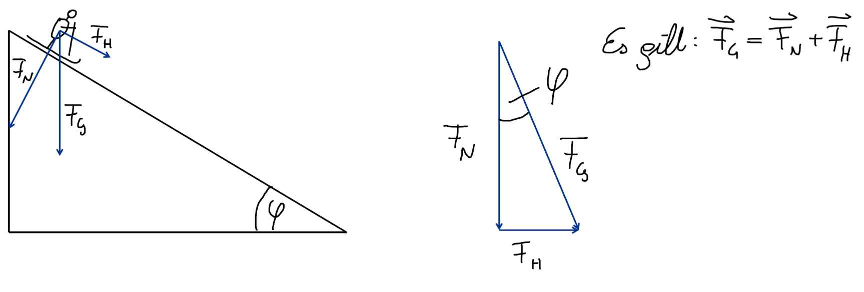

Abbildung 1: Skizze zur Lauberhorn Abfahrt inkl. Kräfte

ist die Hangabtriebskraft. D.h. gemäß Newton gilt daher:

$$F_H = m \cdot g \sin(\varphi) \overset{!}{=} m \cdot a \tag{1}$$

Somit ergibt sich als durchschnittliche Beschleunigung

$$a = g \sin(\varphi) \approx 2,82 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

b) Erneut betrachten wir zunächst alle wirkende Kräfte. Die Reibungskraft erhalten wir nach der Vorlesung als

$$F_R = F_N \cdot \mu_g \tag{3}$$

Da die Reibungskraft der Hangabtriebskraft entgegenwirkt ergibt sich als Kraft entlang des Hanges

$$F = F_H - F_R = m \cdot g \sin(\varphi) - m \cdot g \cdot \mu_g \cos(\varphi) \stackrel{!}{=} m \cdot a \tag{4}$$

Somit ergibt sich als Beschleunigung

$$a \approx 2,54 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{5}$$

Gegeben der Beschleunigung können wir die Zeit welche für die Abfahrt benötigt wird berechnen

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a}} \approx 59,1\mathrm{s} \tag{6}$$

wobei $s = 4430\mathrm{m}$ verwendet wurde. Nun können wir die Endgeschwindigkeit berechnen zu

$$v = a \cdot t \approx 150,1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 540,37 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{7}$$

Diese Endgeschwindigkeit ist offensichtlich sehr unrealistisch. Wir können davon ausgehen, dass die Gleitreibung nicht ausreicht um das Skifahren realistisch zu modellieren.
c) Beim Erreichen der maximalen Geschwindigkeit ist die resultierende Beschleunigung und somit auch die Gesamtkraft null. Somit ergibt sich die Gleichung $F = F_H - F_R - F_L \stackrel{!}{=} 0$. An der maximalen Geschwindigkeit ergibt sich somit

$$m \cdot g \cdot \mu_g \cos(\varphi) + \frac{1}{2} c_W \rho_L \cdot A \cdot v^2 = m \cdot g \sin(\varphi) \tag{8}$$

Aufgelöst nach der Geschwindigkeit erhalten wir

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho_L \cdot A \cdot c_W} (\sin(\varphi) - \mu_g \cos(\varphi))} \tag{9}$$

Benutzen wir $\varphi = 22,78°$ ergibt sich

$$v \approx 31,61 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 113,81 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{10}$$

Verglichen zu Aufgabe b) erhalten wir einen realistischen Wert. Somit ergeben die Gleitreibung ergänzt durch den Luftwiderstand ein funktionierendes Modell des Skifahrens.

Aufgabe 2

Beschleunigung vs. Traktion: Zwei Autos absolvieren ein Wettrennen. Die Rennstrecke besteht aus einer Geraden und einer Kurve. Beide Autos starten gleichzeitig aus dem Stand ($v_0 = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$), beschleunigen konstant auf der $\Delta x = 60$ m langen Geraden und durchfahren dann die Kurve mit einer konstanten Geschwindigkeit. Die Kurve besitzt eine Neigung von 21 % und einen Radius von $r = 40$ m. Die unterschiedlichen technischen Werte der Autos sind:
Auto 1: $m = 2030$ kg, $a = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Auto 2: $m = 1500$ kg, $a = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Weiterhin gilt:
Haftreibung $\mu_R = 0,9$
Erdbeschleunigung $g = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

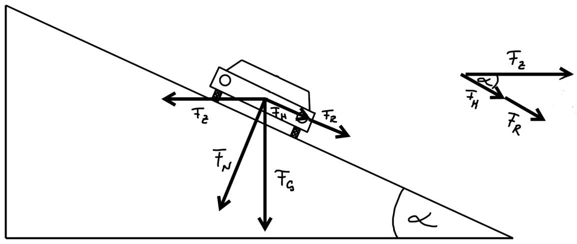

Abbildung 2: Skizze zur Kurvenneigung inkl. Kräfte

Bestimme welcher Fahrer es schafft die Kurve zu durchfahren, bzw. welcher Fahrer die notwendige Zentripetalkraft zur Kurvendurchfahrt nicht aufbringen kann.
Lösung: Zunächst berechnen wir die maximale Geschwindigkeit mit welcher man die Kurve durchfahren kann ohne von der Fahrbahn gedrängt zu werden. Abbildung 2 stellt alle wirkenden Kräfte dar. Wir können bestimmen: $F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$, $F_R = F_N \cdot \mu_R = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ und $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$. Aus dem Kräftegleichgewicht der Abbildung erkennen wir

$$\cos(\alpha) = \frac{F_H + F_R}{F_Z} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) \cdot \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g(\sin(\alpha) + \mu_R \cdot \cos(\alpha)) \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow v_{Max} = \sqrt{r \cdot g(\tan(\alpha) + \mu_R)} = \sqrt{40\text{m} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0{,}21 + 0{,}9)} \approx 20.87\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{13}$$

Nun berechnen wir die Geschwindigkeiten mit welchen die Autos in die Kurve fahren und bestimmen somit, ob diese die Kurve schaffen oder nicht.
Da eine konstante Beschleunigung gegeben ist, können wir die Zeit bis zur Einfahrt in die Kurve berechnen durch

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \tag{14}$$

Einsetzen der gegeben Werte liefert uns jeweils $t_{\text{Auto 1}} = 3,87$ s und $t_{\text{Auto 2}} = 6,32$ s. Somit bestimmen wir die Geschwindigkeit am Ende der Gerade und bei der Einfahrt in die Kurve als

$$v_i = a_i \cdot t_i \Rightarrow v_{\text{Auto 2}} = 18,97\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\text{Auto 1}} = 32,86\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{15}$$

Nun sehen wir dass $v_{\text{Auto 1}} > v_{Max} > v_{\text{Auto 2}}$. Dies impliziert, dass Auto 2 zu schnell in die Kurve einfährt und somit aus der Kurve gedrängt wird. Betrachten wir die Kräfte kann die Summe aus Reibungs- und Hangabtriebskraft nicht die nötige Zentripetalkraft zur Kurvendurchfahrt aufbringen.

Aufgabe 3

Felix Baumgartner vs. Gewöhnlicher Fallschirmspringer. Ein gewöhnlicher Fallschirmspringer mit einer Masse von m =80,0 kg springt aus einer Höhe von 4,00 km aus einem Flugzeug. Die bei diesem Sprung auftretenden Reibungskräfte können gut durch die in der Vorlesung besprochene Newton'sche Reibung genähert werden.

a) In der stabilen Flugposition mit gespreizten Armen und Beinen hat der Fallschirmspringer eine Referenzfläche von A = 0,750 m^2 und einen C_W von 0,837. Die Dichte von Luft beträgt 1,00 kg/m^3. Welche maximale Endgeschwindigkeit kann der Fallschirmspringer in dieser Position erreichen?

b) Der Fallschirmspringer möchte jetzt so schnell wie möglich fallen, deshalb springt er mit dem Kopf voraus, wodurch sich zum einen seine Referenzfläche auf 0,200 m^2 verringert und er etwas „windschnittiger“wird, weshalb sein C_W-Wert auf 0,502 sinkt. Wie schnell kann er jetzt maximal werden?

c) Bei einem Tandemsprung verdoppelt sich sowohl die Masse wie auch die Referenzfläche aus Aufgabenteil b, der C_W-Wert bleibt der selbe, ist der Fallschirmspringer nun schneller als alleine?

d) Am 14. Oktober 2012 erreichte Felix Baumgartner eine Geschwindigkeit von 1357,6 km/h im freien Fall. Wie war das möglich? Welche Dichte der Luft ist nötig um diese Endgeschwindigkeit zu erreichen? Bei dieser Geschwindigkeit ist eine stabile Fluglage unmöglich, man rotiert unkontrolliert. Rechnen Sie deshalb mit den Flächen- und C_W-Werten aus a).

Lösung:
a) Formel für Newton'sche Reibung:

$$F_W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2 \tag{16}$$

Für die Endgeschwindigkeit muss gelten:

$$F_W = F_G \tag{17}$$

$$m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2 \tag{18}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot A \cdot C_W}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,00\ kg/\text{m}^3 \cdot 0,750 \text{ m}^2 \cdot 0,837}} = 50 \text{ m/s} \ = \ 180 \text{ km/h} \tag{19}$$

b) Einsetzen der korrigierten Werte ergibt:

$$v \ = \ \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,00 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,2 \text{ m}^2 \cdot 0,502}} = 125 \text{ m/s} \ = \ 450 \text{ km/h} \tag{20}$$

c)

$$v \ = \ \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,00 \text{ kg/m}^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \text{ m}^2 \cdot 0,502}} = 125 \text{ m/s} \ = \ 450 \text{ km/h} \tag{21}$$

Die Verdopplung der Masse und der Referenzfläche können gekürzt werden $\rightarrow$ der Tandemsprung ist genau gleich schnell.

d) Er sprang aus fast 40 km Höhe in welcher die Atmosphäre eine deutlich geringere Dichte aufweist. 1357,6 km/h= 377,11 m/s > v_{Schall}=343,2 m/s !

$$F_W = F_G \tag{22}$$

$$m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2 \tag{23}$$

$$\rightarrow \ \rho = \frac{2 \cdot m \cdot g}{A \cdot C_W \cdot v^2} = 0,0176 \text{ kg/m}^3 \tag{24}$$

Aufgabe 4

Führen sie mit phyphox das Experiment zur Zentrifugalbeschleunigung durch. (https://phyphox.org/de/experiment/zentrifugalbeschleunigung/)

In dem Video wird das Handy über eine Salatschleuder gedreht. Generell kann dies aber auch mit den verschiedensten Geräten wie z.B. einem Bürostuhl, einem Fahrrad oder ähnlichem geschehen. Seht euch hierzu die Inspirationen am Ende des Videos an. Auch ein zweites Gerät um die Zentrifugalbeschleunigung während des Experiments zu beobachten ist nicht zwingend nötig. Sie können die Messdaten nach dem Experiment auf ihrem Handy abrufen.
Phyphox wird die Zentrifugalbeschleunigung in Abhängikeit von der Winkelgeschwindigkeit angeben.

a) Berechnen Sie aus diesen Daten den Radius mit dem sich das Handy gedreht hat (eine Fehlerrechnung ist nicht nötig).

b) Messen Sie diesen Radius mit einem Lineal und vergleichen sie beide Werte.

c) Welche Bahngeschwindigkeit müsste das Handy haben, damit bei einem Radius von 0,75 m eine Zentrifugalbeschleunigung von 100 m/s^2 wirkt.

d) Wenn Sie Lust haben, schicken sie uns ihr Video zum Experiment zur Zentrifugalbeschleunigung. Am einfachsten per WeTransfer an m.reichert@physik.uni-muenchen.de.

Lösung:
a) In diesem Lösungbeispiel wurde das Handy mit einem ausgestreckten Arm gedreht. Die App maß eine Zentrifugalbeschleunigung von $a \approx 55$ m/s^2 bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega \approx 9$ rad/s.

$$a_Z = \omega^2 \cdot r \rightarrow r = \frac{a_Z}{\omega^2} = \frac{55 \text{ m/s}^2}{(9 \text{ rad/s})^2} = 0,68 \text{ m} \tag{25}$$

b) Mit dem Lineal wurde die Länge das Arms und damit der Radius auf $r \approx 0,6$ m bestimmt. Dieser Wert ist kleiner als der aus der Zentrifugalbeschleunigung berechnete Wert. Es könnte z.B passiert sein ,dass sich die Schulter während des Experimentes ebenfalls gedreht hat, wodurch der effektive Radius größer wird.
c)

$$a_Z = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{r \cdot a_Z} = \sqrt{0,5 \text{ m} \cdot 200 \; m/\text{s}^2} = 10 \text{ m/s} \tag{26}$$