

## Lösungen zu Übungsblatt 11

### Aufgabe 1

- a) Sie haben den Druck in ihren Autoreifen bei einer Temperatur von  $0^\circ\text{C}$  auf 2,0 bar eingestellt. Jetzt fahren Sie 100 km, während der Fahrt erwärmen sich die Reifen auf  $40^\circ\text{C}$ . Wie groß ist der Druck nach Erwärmung, wenn sie die Ausdehnung der Reifen vernachlässigen können und die Luft in den Reifen als ideales Gas nähern?

**Lösung:** Für ein ideales Gas gilt  $pV = Nk_b T$ .  $N$  und  $V$  sind in diesem Fall konstant, da kein Gas den Reifen verlässt und dessen Volumen sich nicht ändert. Wir erhalten also die zwei Gleichungen  $p_1 V = Nk_b T_1$  und  $p_2 V = Nk_b T_2$  für die zwei verschiedenen Temperaturen. Teilen wir die eine durch die andere ergibt sich für den gesuchten Druck

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{313,2\text{ K}}{273,2\text{ K}} \cdot 2,0\text{ bar} \approx 2,29\text{ bar}$$

- b) Ein Wetterballon ist auf Meereshöhe bei  $20^\circ\text{C}$  mit  $5,0\text{ m}^3$  Helium befüllt. Nun lässt man ihn aufsteigen. Welches Volumen hat das Gas, wenn er eine Höhe von 3000 m erreicht, bei der die Temperatur  $5^\circ\text{C}$  und der Druck 0,7 bar beträgt?

**Lösung:** Wir verwenden wieder den Ansatz aus a), wobei das Volumen jedoch nicht konstant ist und deshalb nicht gekürzt werden kann. Das Volumen des Ballons auf 3000 m lässt sich damit ausdrücken als

$$V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1 = \frac{1\text{ bar} \cdot 278,2\text{ K}}{0,7\text{ bar} \cdot 293,2\text{ K}} \cdot 5,0\text{ m}^3 \approx 6,78\text{ m}^3$$

- c) Schätzen Sie, wie viele Luftmoleküle in jedem ihrer Atemzüge (21) enthalten sind, die auch im letzten Atemzug Julius Caesars ("Et tu, Brute?") enthalten waren. Gehen Sie davon aus, dass Luftmoleküle erhalten sind, sich gleichmäßig in der Atmosphäre verteilt haben und Sie die Atmosphäre mit konstanter Dichte und einer Höhe von 10 km nähern können.

**Lösung:** Wieder benutzen wir die ideale Gasgleichung und formen sie diesmal nach der Teilchenzahl  $N$  um. Ein Atemzug enthält also

$$N_{\text{Lunge}} = \frac{p V_{\text{Lunge}}}{k_b T} = \frac{10^5\text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3}{1,381 \cdot 10^{-23}\text{ J/K} \cdot 293,2\text{ K}} \approx 4,94 \cdot 10^{22}$$

Moleküle. Das Volumen der Erdatmosphäre in der vorgegebenen Näherung beträgt

$$V_{\text{Atm}} = 4\pi R_{\text{Erde}}^2 h = 4\pi \cdot (6,37 \cdot 10^6\text{ m})^2 \cdot 10^4\text{ m} \approx 5,10 \cdot 10^{18}\text{ m}^3$$

Mit dem Verhältnis des Lungenvolumens zum Atmosphärenvolumen lässt sich die gesuchte Anzahl der Moleküle in jedem Atemzug berechnen:

$$N_{\text{Caesar}} = \frac{V_{\text{Lunge}}}{V_{\text{Atm}}} N_{\text{Lunge}} \approx 20$$

### Aufgabe 2

**Thermische Prozesse eines idealen Gases.** Betrachten Sie den folgenden Zwei stufen Prozess: Wärme fließt aus einem idealem Gas bei konstantem Volumen heraus, wobei sein Druck von 2,2 bar auf 1,5 bar fällt. Dann expandiert das Gas bei konstantem Druck von 6,81 auf 10,01, wobei die Temperatur ihren ursprünglichen Wert wieder erreicht. Betrachten Sie die Abbildung 1.

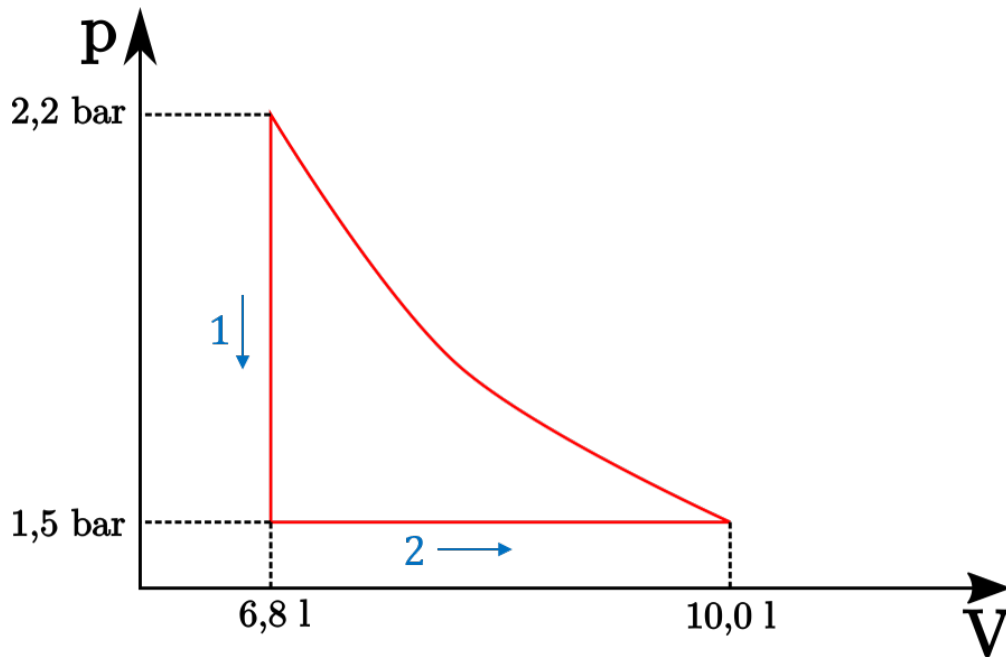


Abbildung 1: Abbildung des in Aufgabe 2 beschriebenen Prozesses.

- a) Ordnen Sie den beschriebenen Teilprozessen die entsprechende Kurve im PV-Diagramm zu und kennzeichnen Sie die Umlaufrichtung.

**Lösung:** Siehe Abbildung 1.

- b) Berechnen Sie die gesamte vom Gas verrichtete Arbeit.

**Lösung:** Ein ideales Gas verrichtet nur dann Arbeit, wenn es sein Volumen ändert. In diesem Fall also im zweiten Schritt. Die verrichtete Arbeit bei konstantem Druck ist gegeben durch

$$\Delta W = W_{1,2} = -p \cdot (V_2 - V_1) = -1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = -480 \text{ J}$$

- c) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie des Gases in dem Prozess.

**Lösung:** Die innere Energie eines idealen Gases ist proportional zu seiner Temperatur. Da für diesen Prozess  $\Delta T = 0$  ist muss auch  $\Delta U = 0$  sein.

- d) Berechnen Sie den gesamten Wärmefluss in das Gas hinein oder aus dem Gas hinaus.

**Lösung:** Aus der Vorlesung wissen wir, dass  $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$  gilt. Mit  $\Delta U = 0$  erhalten wir also

$$\Delta Q = -\Delta W = 480 \text{ J}$$

Der gesamte Wärmefluss ist positiv, es fließt also Wärme in das Gas hinein.

### Aufgabe 3

**Gasgeschwindigkeiten.** Die beiden Uran-Isotope  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  (die Zahlen beziehen sich auf ihr Atomgewicht) können durch einen Gasdiffusionsprozess voneinander getrennt werden. Man kombiniert Sie dabei mit Fluor  $^{19}\text{F}$  zur Verbindung  $\text{UF}_6$ . Berechnen Sie das Verhältnis der  $v_{\text{rms}}$  ("Root-mean-squared" Geschwindigkeiten) dieser Moleküle für die beiden Isotope.

**Lösung:** Die Isotope befinden sich im thermodynamischen Gleichgewicht und haben daher die gleiche Temperatur  $T_{235} = T_{238}$ . Die Temperatur ist proportional zur mittleren Geschwindigkeit der Moleküle  $T \propto mv_{\text{rms}}^2$  woraus sich für das Verhältnis der Geschwindigkeiten das folgende ergibt:

$$1 = \frac{T_{235}}{T_{238}} = \frac{m_{235} v_{\text{rms},235}^2}{m_{238} v_{\text{rms},238}^2} \implies \frac{v_{\text{rms},235}}{v_{\text{rms},238}} = \sqrt{\frac{m_{238}}{m_{235}}}$$

Die Massen der Moleküle lassen sich mit den Massenzahlen der einzelnen Atome berechnen.

$$\frac{v_{\text{rms},235}}{v_{\text{rms},238}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 19 \text{ u} + 238 \text{ u}}{6 \cdot 19 \text{ u} + 235 \text{ u}}} \approx 1,0043$$

Die Moleküle mit dem leichteren  $^{235}\text{U}$  Isotop sind also 0,43% schneller als die mit dem schwereren  $^{238}\text{U}$  Isotop.

#### Aufgabe 4

##### Thermische Ausdehnung.

- a) Ein Stahlring soll über einen Stahlzylinder passen. Bei  $20^\circ\text{C}$  beträgt der Stabdurchmesser 6,225 cm, während der Innendurchmesser des Ringes 6,200 cm ist. Gehen Sie davon aus, dass der Innendurchmesser des Ringes um 0,008 cm größer als der Stabdurchmesser sein muss, um leicht über den Stab zu passen. Auf welche Temperatur muss man den Ring erwärmen, damit er passt? Der thermische Ausdehnungskoeffizient für Stahl beträgt  $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . *Hinweis: Betrachten Sie die Längenausdehnung des Umfanges der Innenseite des Ringes..*

**Lösung:** Der Umfang auf der Innenseite ist  $\pi d$ . Der Durchmesser  $d$  muss sich um 0,033 cm ändern damit der Ring über den Stab passt. Das entspricht etwa 0,5323% des Durchmessers bei  $20^\circ\text{C}$ . Also muss sich auch der Innenumfang um 0,5323% oder  $5,323 \cdot 10^{-3}$  ändern. Daraus ergibt sich die benötigte Temperaturdifferenz

$$\Delta T = \frac{5,323 \cdot 10^{-3}}{\alpha} \approx 313,1 \text{ }^\circ\text{C}$$

- b) Der 60l Tank eines Autos wird von einem unvorsichtigen Autofahrer bei  $20^\circ\text{C}$  bis ganz zum Rand mit Benzin gefüllt. Das Auto steht dann in der Sonne und wärmt sich auf  $45^\circ\text{C}$  auf. Wie viel Benzin wird überlaufen? Der Tank des Autos sei aus Stahl. Benzin hat einen Volumenausdehnungskoeffizienten von  $\beta = 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . *Hinweis: Berücksichtigen Sie auch die Ausdehnung des Tanks. Diese können Sie berechnen, in dem Sie die Volumenänderung eines gleich großen massiven Stahlkörpers betrachten.*

**Lösung:** Für die Volumenausdehnung gilt  $\frac{\Delta V}{V} = \beta \cdot \Delta T$  woraus sich eine Volumendifferenz von

$$\Delta V_{\text{Benzin}} = \beta_{\text{Benzin}} \cdot \Delta T \cdot V = 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot 25 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 60 \text{ l} = 1,425 \text{ l}$$

ergibt. Der Volumenausdehnungskoeffizient von Stahl lässt sich für kleine Temperatureänderungen als  $\beta_{\text{Stahl}} = 3 \cdot \alpha_{\text{Stahl}}$  nähern. Also vergrößert sich der Tank um

$$\Delta V_{\text{Tank}} = 3 \cdot \alpha_{\text{Stahl}} \cdot \Delta T \cdot V = 3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot 25 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 60 \text{ l} = 0,0765 \text{ l}$$

Die Differenz ergibt die Menge an Benzin, die überläuft:

$$\Delta V_{\text{Benzin}} - \Delta V_{\text{Tank}} = 1,425 \text{ l} - 0,0765 \text{ l} \approx 1,35 \text{ l}$$

- c) Rechnen Sie die Temperaturangaben aus der letzten Teilaufgabe in °F (“Grad Fahrenheit”) um. Was sind angenehme Temperaturen in einem amerikanischen Wetterbericht? Was sind unangenehm warme Temperaturen?

**Lösung:** Es gilt  $T_F = \frac{9}{5} T_C \frac{^\circ F}{^\circ C} + 32^\circ F$ . Demnach entsprechen  $20^\circ C$  also  $68^\circ F$  und  $45^\circ C$  entsprechen  $113^\circ F$ . Man könnte also sagen, dass angenehme Temperaturen in einem amerikanischen Wetterbericht in den Siebzigern liegen würden und es in den Achtzigern anfängt unangenehm warm zu werden. Wobei das natürlich sehr subjektive Angaben sind.

- d) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen dem Längen-Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  und dem Volumen-Ausdehnungskoeffizientens  $\beta$  eines isotropen (alle Raumrichtungen sind gleichberechtigt) Festkörpers her. (*Hinweis: Betrachten Sie die Änderung des Volumens eines Körpers in Abhängigkeit der Temperatur, d.h. berechnen Sie  $\frac{\Delta V}{\Delta T}$ . Wie lässt sich das Volumen in Längen zerlegen?*)

**Lösung:** Für die Volumenänderung in Abhängigkeit von der Temperatur gilt

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \beta \cdot V \quad (1)$$

Für einen quaderförmigen Körper lässt sich das Volumen durch die drei Seitenlängen ausdrücken

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \quad (2)$$

Die Änderung einer Seitenlänge  $l_1$  um  $\Delta l_1$  hat dann eine Volumenänderung von  $\Delta l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$  zur Folge, wenn  $l_2$  und  $l_3$  in etwa konstant bleiben. Genauso ist es für die beiden anderen Seitenlängen. Kleine Volumenänderungen lassen sich näherungsweise als die Summe der so entstehenden Volumenänderungen ausdrücken:

$$\Delta V = \Delta l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 + \Delta l_2 \cdot l_1 \cdot l_3 + \Delta l_3 \cdot l_1 \cdot l_2 \quad (3)$$

Setzen wir nun (3) in (1) ein so erhalten wir:

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{\Delta l_1}{\Delta T} \cdot l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot \frac{\Delta l_2}{\Delta T} \cdot l_3 + l_1 \cdot l_2 \cdot \frac{\Delta l_3}{\Delta T} = \beta \cdot V \quad (4)$$

Die Längenänderung der einzelnen Seiten lässt sich mit dem Längenausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  beschreiben:

$$\frac{\Delta l_i}{\Delta T} = \alpha \cdot l_i \quad (5)$$

Die Gleichung (5) lässt sich in jeden der drei Terme auf der linken Seite der Gleichung (4) einsetzen wodurch sich die folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \beta \cdot V &= \alpha \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot \alpha \cdot l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_2 \cdot \alpha \cdot l_3 \\ \beta \cdot V &= 3\alpha \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \end{aligned}$$

Zuletzt setzen wir nun Gleichung (2) ein und kürzen auf beiden Seiten das Volumen weg, womit sich der gesuchte Zusammenhang ergibt:

$$\beta = 3\alpha$$

Um diesen Beweis von isotropen Quadern auf alle isotropen Körper zu erweitern kann man sich überlegen, wie ein beliebiger Körper durch viele kleine Quader dargestellt werden kann, 3D-Pixel (Voxel) sozusagen. Dann kann man die Volumenänderung des Körpers als die Summe der Änderungen für jeden kleinen Pixel-Quader berechnen. Für jeden der Voxel gilt der Beweis.