



Blatt 0: Mathematische Grundlagen

Ausgabe: Freitag, 29.10.20; Abgabe: keine (0 Punkte)

Aufgabe 1 Lineare Algebra

Wir bezeichnen die normierten Basisvektoren eines unitären Vektorraums V (d.h. eines Vektorraums mit Skalarprodukt) mit dem Symbol $|n\rangle$, $n = 1, \dots, \dim(V)$, und die dazu konjugierten Basisvektoren mit $\langle n|$ ¹. Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird mit $\langle u|v\rangle$ notiert, und wir betrachten Basisvektoren für die gilt: $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$. Eine Matrix A wird *hermitesch* genannt, falls $A^\dagger = A$ [wobei $(A^\dagger)_{n,m} = A_{m,n}^*$]; eine Matrix wird *unitär* genannt, falls $U^{-1} = U^\dagger$ gilt. Die Spur einer Matrix ist die Summe über ihre Diagonalelemente, d.h. in unserer Notation: $\text{tr}(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$.

- (1.a) Zeigen Sie die so genannte Zerlegung der Eins: $\sum_n |n\rangle \langle n| = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist.
- (1.b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix reell und einer antihermiteschen Matrix imaginär sind [Eine Matrix A heißt antihermitesch wenn $A^\dagger = -A$]. Zeigen Sie weiterhin, dass Eigenvektoren $|\lambda\rangle, |\lambda'\rangle$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \lambda'$ orthogonal sind [d.h. $\langle \lambda|\lambda'\rangle = 0$].
- (1.c) Zeigen Sie, dass $[\exp(iA)]^\dagger = \exp(-iA^\dagger)$ und dass für B hermitesch $\exp(iB)$ unitär ist. Beachten Sie dabei, dass das Exponential einer Matrix einfach durch die Exponentialreihe definiert wird, also $\exp(A) = 1 + A + A^2/2 + \dots$
- (1.d) Zeigen Sie dass $\text{tr}(ABCD\dots YZ) = \text{tr}(ZAB\dots Y)$, d.h. unter der Spur darf zyklisch vertauscht werden.
- (1.e) Zeigen Sie, dass die Spur einer beliebigen Matrix invariant unter unitären Transformationen ist und dass die Spur eine lineare Abbildung ist.
- (1.f) Zeigen Sie für eine hermitesche Matrix A , dass die Spur die Summe der Eigenwerte und die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Zeigen Sie dass $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ gilt.
- (1.g) Die Pauli-Matrizen, die später bei der Behandlung des Spins eine große Rolle spielen werden, sind definiert durch

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass diese Matrizen hermitesch sind. Bestimmen Sie $\exp(-i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})$, wobei $\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha} = \sum_i \alpha_i \sigma_i$ mit reellen Zahlen α_i (den Komponenten des Vektors α).

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})^2$.

¹Sie können dabei an Spaltenvektoren $|n\rangle = (z_1^{(n)}, \dots, z_{\dim(V)}^{(n)})^T$ bzw. die zugeordneten komplex-konjugierten Zeilenvektoren $\langle n| = (z_1^{(n)*}, \dots, z_{\dim(V)}^{(n)*})$ denken.

Aufgabe 2 Kommutatoren

Ein zentraler Begriff der Quantenmechanik ist der *Kommutator* (bzw. *Antikommutator*). Wir werden sehen, dass physikalische Größen durch hermitesche Matrizen beschrieben werden können. Die diesen zugeordneten Kommutatoren bestimmen sowohl ihre Messbarkeit als auch ihre zeitliche Entwicklung. Wir definieren für zwei hermitesche Matrizen A, B gleicher Dimension den Kommutator als

$$[A, B] = AB - BA \quad (2)$$

und den Antikommutator als

$$\{A, B\} = AB + BA. \quad (3)$$

Im folgenden sollen einige wichtige Beziehungen für (Anti)kommutatoren gezeigt werden. A und B seien hermitesch und gleicher Dimension.

(2.a) Zeigen Sie, dass $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$ und $\{A, B\}^\dagger = \{A^\dagger, B^\dagger\}$.

(2.b) Zeigen Sie, dass $i[A, B]$ hermitesch und $i\{A, B\}$ antihermitesch ist.

(2.c) Zeigen Sie, dass $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ gilt.

(2.d) Zeigen Sie, dass $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobische Identität).

(2.e) Zeigen Sie, dass man für A und B einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren konstruieren kann, falls $[A, B] = 0$. Daraus werden wir später folgern, dass physikalische Größen, deren zugeordnete Matrizen kommutieren, gleichzeitig (im Prinzip) beliebig genau gemessen werden können.

Aufgabe 3 Unschärferelation

Wir benutzen einige der bewiesenen Aussagen, um die berühmte Unschärferelation für physikalische Messgrößen zu zeigen. Betrachten Sie für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle \in V$ und hermitesche Matrizen A, B folgende Zustände

$$|\psi_A\rangle = (A - \langle A \rangle) |\psi\rangle, \quad |\psi_B\rangle = (B - \langle B \rangle) |\psi\rangle \quad \text{mit} \quad \langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (4)$$

Die Unschärfe ΔO einer Messgröße O sei durch $(\Delta O)^2 = \langle \psi_O | \psi_O \rangle$ definiert. Verwenden Sie die Schwarz'sche Ungleichung und die Zerlegung $AB = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}\{A, B\}$, um die Unschärferelation

$$(\Delta A)(\Delta B) = \sqrt{|\langle \psi_A | \psi_A \rangle \langle \psi_B | \psi_B \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (5)$$

zu zeigen.