SEKTION PHYSIK DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. V. Mukhanov · Quantenmechanik II (T V) · WS 2001/02

Aufgabe 1 (FORMALISMUS) (5 PKT.)

1.1 Bestimmen Sie den Operator $\hat{X}$ in folgender Entwicklung (2 PKT.)

$$(\hat{A} + \lambda\hat{B})^{-1} = \hat{A}^{-1} + \lambda\hat{X} + O(\lambda^2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

1.2 Gegeben sei der Hamilton–Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \hat{V}(\hat{x})$ mit $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$\langle n|\hat{x}|n'\rangle = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\langle n|\hat{p}|n'\rangle}{E_n - E_{n'}}\,. \quad (3 \text{ PKT.})$$

Hinweis: Betrachten Sie den Kommutator $[\hat{x}, \hat{H}]$.

Aufgabe 2 (TRANSLATIONSOPERATOR) (9 PKT.)

Die Wirkung des Translationsoperators $\hat{T}(a)$ auf einen Eigenzustand $|x\rangle$ des Ortsoperators ist definiert durch $\hat{T}(a)|x\rangle := |x + a\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

2.1 $\hat{T}(a)\hat{T}(b) = \hat{T}(a + b)$, (1 PKT.)

2.2 $\hat{T}(a)$ ist unitär, (1 PKT.)

2.3 $\hat{T}(a)$ ist von der Form $\hat{T}(a) = \exp(ia\hat{G})$ mit einem (zunächst unbestimmten) hermiteschen Operator $\hat{G}$, (2 PKT.)

2.4 $\hat{T}^\dagger(a)\,\hat{x}\,\hat{T}(a) = \hat{x} + a$. (2 PKT.)

2.5 Werten Sie 2.4 für infinitesimale Verschiebung a aus, und bestimmen Sie daraus den Operator $\hat{G}$. (3 PKT.)

Aufgabe 3 (DICHTEMATRIX) (10 PKT.)

3.1 Charakterisieren Sie einen reinen Zustand $|\psi\rangle$ durch seine Dichtematrix. (1 PKT.)

3.2 Ein unpolarisierter Strahl von geladenen Teilchen bestehe je zur Hälfte aus Teilchen mit 'spin–up' bzw. 'spin–down', charakterisiert durch die Zustandsvektoren $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{0}{1}$. Berechnen Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Systems. (2 PKT.)

3.3 Berechnen Sie $\mathrm{tr}(\hat{\rho})$ und $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)$ für den Teilchenstrahl. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (2 PKT.)

3.4 Nun werde ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ eingeschaltet. Der Hamilton–Operator des Systems lautet somit $\hat{H} = -\mu B\sigma_3$ mit $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie Zustandssumme und Energie des Systems bei Temperatur $T = 1/\beta k$. (5 PKT.)

Prof. V. Mukhanov · Quantenmechanik II (T V) · WS 2000/01

Aufgabe 4 (Spinmatrizen) (10 Pkt.)

Die hermiteschen Pauli–Matrizen σ_i sind gekennzeichnet durch die Bedingung der Spurlosigkeit, $\mathrm{tr}\,\sigma_i = 0$, und die Normierung $\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$. Beweisen Sie:

4.1 Jede komplexe (2×2)–Matrix A lässt sich entwickeln gemäß

$$A = a\mathbb{1} + b_i\sigma_i \, .$$

Hinweis: Es genügt, die Entwicklungskoeffizienten a und b_i durch A und σ_i auszudrücken. (3 Pkt.)

4.2 $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, (3 Pkt.)

4.3 $\exp(ia_i\sigma_i) = \mathbb{1}\cos|a| + in_i\sigma_i\sin|a|$, $a_i \in \mathbb{R}$, $|a| = \sqrt{a_ia_i}$, $n_i = a_i/|a|$. (4 Pkt.)

Hinweis: Berechnen Sie die geraden und ungeraden Potenzen von $a_i\sigma_i$ unter Verwendung von 4.2.

Aufgabe 5 (Kurzzeit-Propagator) (5 Pkt.)

Gegeben sei der Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{T}(\hat{p},t) + \hat{V}(\hat{x},t)$ mit kinetischer Energie $\hat{T}$ und Potential $\hat{V}$. Zeigen Sie, dass der Propagator $K(x',t';x,t)$ für kleine Zeitdifferenz $\delta t \equiv t' - t$ näherungsweise gegeben ist durch

$$K(x',x;\delta t) \simeq \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[ip(x'-x)/\hbar - i\delta t H(x,p,t)/\hbar\right]$$

Hinweis: $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$, falls $[\hat{A},\hat{B}]$ mit $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutiert.

Aufgabe 6 (Streuung am Gaussschen Potential) (6 Pkt.)

Gegeben sei das rotationssymmetrische Streupotential $V(r) = V_0 \exp\left(-r^2/2r_0^2\right)$.

6.1 Berechnen Sie die zugehörige Streuamplitude f in erster Bornscher Näherung. (5 Pkt.)

6.2 Was ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt? (1 Pkt.)

Aufgabe 7 (Drehimpuls) (6 Pkt.)

Berechnen Sie die operatorwertigen, vektoriellen Produkte

7.1 $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$, (2 Pkt.)

7.2 $\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}}$. (4 Pkt.)

Aufgabe 8 (ZWEI–NIVEAU–SYSTEM) (8 PKT.)

Gegeben sei der Hamilton–Operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ mit

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda v \\ \lambda v & 0 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

8.1 Bestimmen Sie die Energie–Eigenwerte $E_{I,II}$ von $\hat{H}$ durch exakte Matrix–Diagonalisierung. (4 PKT.)

8.2 Entwickeln Sie das Ergebnis aus 8.1 nach Potenzen von λ. Vergleichen Sie mit der Energieverschiebung Δ_n in zweiter Ordnung Störungstheorie,

$$\Delta_n = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|\hat{V}|m\rangle|^2}{E_n - E_m}, \quad \text{wobei} \quad \hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle. \qquad \text{(4 PKT.)}$$

Aufgabe 9 (HARMONISCHER OSZILLATOR MIT LINEARER STÖRUNG) (10 PKT.)

Gegeben sei der Hamilton–Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{q}^2/2 + \alpha\hat{q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.1 Welches physikalische System besitzt einen derartigen Hamilton–Operator? (1 PKT.)

9.2 Bestimmen Sie die exakten Energie–Eigenwerte von $\hat{H}$. (3 PKT.)

Hinweis: Quadratische Ergänzung!

9.3 Stellen Sie den Propagator $K_\alpha(q_f, t_f; q_i, t_i)$ des Systems durch ein Pfadintegral im Konfigurationsraum dar. (2 PKT.)

9.4 Zeigen Sie mit Hilfe des Pfadintegrals:

$$K_\alpha = K_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha^2}{2m\omega^2}T\right), \quad T = t_f - t_i.$$

Dabei ist K_0 der ungestörte Propagator ($\alpha = 0$). (4 PKT.)