Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Lösungsskizze Blatt 6

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Momente und Kumulanten

Wir haben aus der Entwicklung in Kumulanten, dass:

$$\begin{aligned}\Phi_X(k) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ik)^n}{n!}\kappa_n\right)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{(ik)^n}{n!}\kappa_n\right)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{(ik)^n}{n!}\kappa_n\right)^r\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\frac{(ik)^{n\cdot r}}{(n!)^r}\kappa_n^r\end{aligned}$$

Wir können die Produkte/Summen umformulieren:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}f(n,r) &= \left(\sum_{r_1=0}^{\infty}f(1,r_1)\right)\cdot\left(\sum_{r_2=0}^{\infty}f(2,r_2)\right)\cdots\\ &= \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\ldots}^{\infty}\left(f(1,r_1)\cdot f(2,r_2)\cdots\right)\\ &= \sum_{\{r_n=0\}_{n\geq 1}}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}f(n,r_n),\end{aligned}$$

und somit ist

$$\Phi_X(k) = \sum_{\{r_n=0\}_{n\geq 1}}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n!}\frac{(ik)^{n\cdot r_n}}{(n!)^{r_n}}\kappa_n^{r_n}.$$

Eine weitere Umformulierung der Summe liefert

$$\begin{aligned}\Phi_X(k) &= \sum_{\{r_n=0\}_{n\geq 1}}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n!}\frac{\kappa_n^{r_n}}{(n!)^{r_n}}\right)(ik)^{\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot r_n}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\{r_n=0\}_{n>0},\\ (\sum_{n=1}n\cdot r_n)=m}}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n!}\frac{\kappa_n^{r_n}}{(n!)^{r_n}}\right)(ik)^m \stackrel{!}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ik)^m}{m!}\mu_m\end{aligned}$$

und das Ergebnis folgt

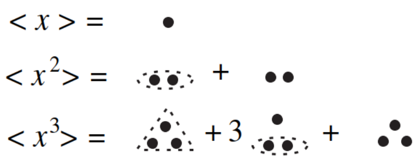
$$\mu_m = m!\sum_{\substack{\{r_n=0\}_{n>0},\\ (\sum_{n=1}n\cdot r_n)=m}}\prod_n\frac{1}{(n!)^{r_n}r_n!}\kappa_n^{r_n}.$$

Wir haben

1. Für μ_0 muss $r_n = 0$ sein, also $\mu_0 = \prod_n \frac{0!}{(n!)^0 0!}\kappa_n^0 = 1$.

2. Für μ_1 muss $\sum_{n=1} nr_n = 1$ sein, mit einzigen Beitrag von $n = 1, r_1 = 1$ und somit ist $\mu_1 = \frac{1!}{1!^1 1!}\kappa_1^1 = \kappa_1$.
3. Für μ_2 muss $\sum_{n=1} nr_n = 2$ sein, also zwei Zerlegungen $(r_1, r_2, \ldots) = (2, 0, \ldots) \leftrightarrow (1+1)$ und $(r_1, r_2, \ldots) = (0, 1, \ldots) \leftrightarrow (2)$, und somit ist $\mu_2 = 2!\frac{1}{1!^2 2!}\kappa_1^2 + 2!\frac{1}{2!1!}\kappa_2 = \kappa_1^2 + \kappa_2$.
4. Für μ_3 muss $\sum_{n=1} nr_n = 3$, also finden wir Zerlegungen $(r_1, r_2, \ldots) = (3, 0, \ldots) \leftrightarrow (1+1+1)$, $(r_1, r_2, \ldots) = (1, 1, 0, \ldots) \leftrightarrow (2+1)$ und $(r_1, r_2, r_3, \ldots) = (0, 0, 1, 0, \ldots) \leftrightarrow (3)$. Dann ist: $\mu_3 = \kappa_1^3 + 3\kappa_2\kappa_1 + \kappa_3$.

Eine graphische Darstellung der Rechnung μ_1–μ_3:



Aufgabe 2: Summe von Zufallsvariablen

a) Wir betrachten ein Beispiel im diskreten Fall: z. B. $X_i \in \{1, 2, 3\}$, dann ist $p(X_1 + X_2 = Y) = \sum_{X_1} p(x_1)p(y - x_1)$. Übergang zum kontinuierlichem Fall liefert

$$\rho_{X_1+X_2}(y) = \int_0^y \rho_{X_1}(x) \cdot \rho_{X_2}(y - x)\ \mathrm{d}x.$$

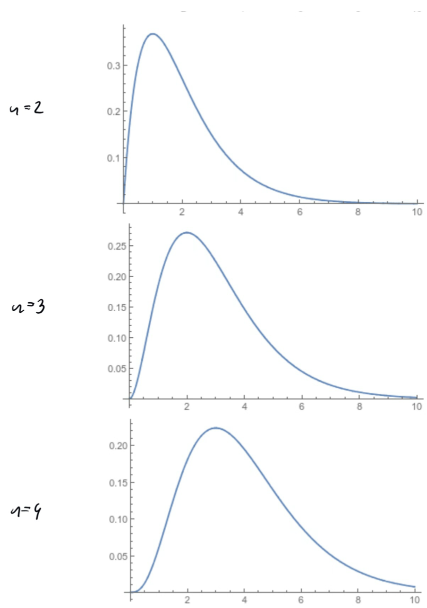
b) Wir haben

$$\rho_{X_1+X_2} = \int_0^y e^{-x}e^{x-y}\mathrm{d}x = ye^{-y}$$

$$\rho_{X_1+X_2+X_3} = \rho_{(X_1+X_2)+X_3} = \int_0^y \rho_{X_1+X_2}(x)\rho_{X_3}(y-x)\mathrm{d}x = \int_0^y xe^{-x}e^{x-y}\mathrm{d}x = \frac{y^2}{2}e^{-y}$$

$$\rho_{X_1+X_2+X_3+X_4} = \rho_{(X_1+X_2+X_3)+X_4} = \int_0^y \frac{x^2}{2}e^{-x}e^{x-y}\mathrm{d}x = \frac{y^3}{3!}e^{-y}$$

Skizzen:

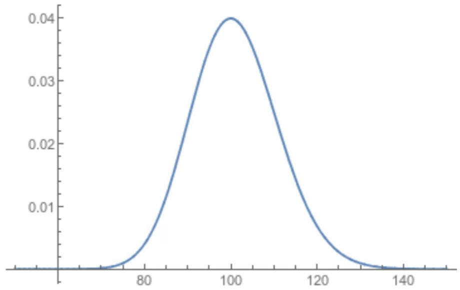


c) Wir zeigen, dass $\rho_{\sum_i^n X_i}(y) = \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y}$. Wir haben schon den Fall $n=1$. Für den Induktionsschritt:

$$\rho_{\sum_i^{n+1} X_i}(y) = \int_0^y \rho_{\sum_i^n X_i}(x)\rho_{X_{n+1}}(y-x)\mathrm{d}x = e^{-y}\int_0^y e^{-x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x = \frac{y^n}{n!}e^{-y}.$$

Skizze:

n=100



d) Erwartungswert: $\langle X\rangle = \int_0^\infty x\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n+1)}{(n-1)!} = n$.

Standardabweichung: $\langle X^2\rangle = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n+2)}{(n-1)!} = n(n+1)$ und $\sigma_X^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = n^2+n-n^2 = n$.

e) Zentraler Grenzwertsatz: wenn $n \gg 1$,

$$\rho_{\sum_i^n X_i} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}}$$

Analytische Begründung für unseren Fall:
Maximum von $f(y) := \frac{y^n}{n!}e^{-y}$: $f'(y) = 0 \implies \left(\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{y^n}{n!}\right)e^{-y} = 0 \implies y_n = n$. Wir entwickeln $\ln f(y)$ um $y_n = n$:

$$\begin{aligned}\ln f(y) &= \ln\left(\frac{e^{-n}n^n}{n!}\right) - \frac{(y-n)^2}{2n} + \mathcal{O}(y^3)\\ &\overset{n\gg1}{\simeq} \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} - \frac{(y-n)^2}{2n} + \mathcal{O}(y^3)\end{aligned}$$

wo im zweiten Schritt die Stirling Formel benutzt wurde: $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.