Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Lösungsskizze Blatt 2

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Carnot-Prozess mit Photonengas

a) 1HS: $\delta Q = \mathrm{d}U - \delta W = \mathrm{d}(\sigma T^4 V) + p\mathrm{d}V = 4\sigma T^3 V \mathrm{d}T + (1 + \frac{1}{3})\sigma T^4 \mathrm{d}V$

b) $B \to C$ adiabatisch, also $\delta Q_{B\to C} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V}$, Integration zwischen B, C: $3\log T|_B^C = -\log V|_B^C \implies \frac{V_B}{V_C} = \frac{T_C^3}{T_B^3}$. Ähnlich zeigen wir $\frac{V_D}{V_A} = \frac{T_A^3}{T_D^3}$.

c)

$A \to B$: $(T = T_w)$: $\Delta U = \int_{V_A}^{V_B} \sigma T_w^4 \mathrm{d}V = \sigma T_W^4 (V_B - V_A)$, $\Delta W = -\int_{V_A}^{V_B} p\mathrm{d}V = -\int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{3}\sigma T_w^4 \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{3} T_w^4 (V_A - V_B)$, $\Delta Q = \Delta U - \Delta W = \frac{4}{3}\sigma T_w^4 (V_B - V_A) > 0$ (Wärme zugeführt).

$B \to C$: $\Delta Q = 0$, $\Delta U = \Delta W = -\int_{V_B}^{V_C} p(U, V)\mathrm{d}V = -\int_{V_B}^{V_C} \frac{\sigma}{3} T^4(V)\mathrm{d}V$ und aus Adiabatengleichung folgt $T(V) = k \cdot V^{-1/3}$, wo $k = T_B V_B^{1/3}$, so $\Delta U = \Delta W = -k^4 \int_{V_B}^{V_C} \frac{\sigma}{3} V^{-4/3}\mathrm{d}V = \sigma k^4 (V_C^{-1/3} - V_B^{-1/3}) = \sigma T_w^3 V_B (T_k - T_w)$.

$C \to D$: $(T = T_k)$: $\Delta U = \int_{V_C}^{V_D} \sigma T_k^4 \mathrm{d}V = \sigma T_k^4 (V_D - V_C)$. Zwei Adiabatengleichungen zeigen $\frac{V_B}{V_C} = \frac{T_C^3}{T_B^3} = \frac{T_k^3}{T_w^3} = \frac{T_D^3}{T_A^3} = \frac{V_A}{V_D}$, und so $\Delta U = \sigma T_k T_w^3 (V_A - V_B)$, $\Delta W = -\int_{V_C}^{V_D} p\mathrm{d}V = -\int_{V_C}^{V_D} \frac{\sigma}{3} T_k^4 \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{3} T_k^4 (V_C - V_D) = \frac{\sigma}{3} T_k T_w^3 (V_B - V_A)$ und $\Delta Q = \Delta U - \Delta W = \frac{4}{3}\sigma T_k T_w^3 (V_A - V_B) < 0$

$D \to A$: $\Delta Q = 0$, $\Delta U = \Delta W = -\int_{V_D}^{V_A} p(U, V)\mathrm{d}V = -\tilde{k}^4 \int_{V_D}^{V_A} \frac{\sigma}{3} V^{-4/3}\mathrm{d}V = \tilde{k}^4 \sigma (V_A^{-1/3} - V_D^{-1/3})$, wo $\tilde{k} = T_A V_A^{1/3}$, also $\Delta U = \Delta W = \sigma T_w^3 V_A (T_w - T_k)$.

d) Geleistete Arbeit $= -\sum_i \Delta W_{i\to i+1} = -\frac{\sigma}{3} T_w^4 (V_A - V_B) - \sigma T_w^3 V_B (T_k - T_w) - \frac{\sigma}{3} T_k T_w^3 (V_B - V_A) - \sigma T_w^3 V_A (T_w - T_k) = \frac{4\sigma}{3} T_w^3 (V_B - V_A)(T_w - T_k)$.
Zugefügte Wärme $= \sum_{i, \Delta Q > 0} \Delta Q_{i\to i+1} = \frac{4}{3}\sigma T_w^4 (V_B - V_A)$
Wirkungsgrad: $\eta = \left(1 - \frac{T_k}{T_w}\right)$.

Aufgabe 2: Wärmekapazitäten

a) Wir wählen P, T als unabhängige Variablen und so $U = U(p, T)$, $V = V(p, T)$ und $\delta Q = \mathrm{d}U - \delta W = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T$. Für eine Z.Ä. mit $p =$konst. ist dann $C_p = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Für eine Z.Ä. mit $V =$konst. ist $\delta W = -p\mathrm{d}V = 0$ und $\delta Q = \mathrm{d}U$ und somit $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$.

b) Folgt direkt aus 'extra' Resultat von 1b) in Blatt 1, mit $x = U, w = T, z = p, y = V$.

c) Substitution von 2b) ein 2a).

d) Wir ersetzen das gegebene Ergebnis in 2c) und somit folgt direkt $C_p - C_V = T\left(\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Für das ideale Gas $pV = NkT$ also $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{Nk}{V}$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{Nk}{p}$ und somit $C_p - C_V = T\frac{(Nk)^2}{pV} = Nk > 0$.

Aufgabe 3: Zustandsgleichung magnetischer Substanzen

a) Laut Hinweis, wir wählern T, H als unabhängige Variablen und dann gilt $\mathrm{d}X = \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_H \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial X}{\partial H}\right)_T \mathrm{d}H$ für alle Zustandsvariablen X und die zweite Ableitungen sind symmetrisch: $\left(\frac{\partial}{\partial H}\right)_T \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_H \left(\frac{\partial X}{\partial H}\right)_T$. 1HS: $\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T \mathrm{d}H = \frac{1}{T}\Big(\mathrm{d}U - H\mathrm{d}M\Big) = \frac{1}{T}\Big(\big(\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T - H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\big)\mathrm{d}H + \big(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\big)\mathrm{d}T\Big)$. Aus Symmetrie folgt dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_H \left[\frac{1}{T}(\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T - H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T)\right] = \left(\frac{\partial}{\partial H}\right)_T \left[\frac{1}{T}(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H)\right] \implies$$

$$-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T + \cancel{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial H}} + \frac{H}{T^2}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T - \cancel{\frac{H}{T}\frac{\partial^2 M}{\partial T \partial H}} = \cancel{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial H \partial T}} - \frac{1}{T}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H - \cancel{\frac{H}{T}\frac{\partial^2 M}{\partial H \partial T}}$$

$$\implies \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T.$$

b) Wir berechnen aus 3a): $T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T = -K\frac{H}{T} + K\frac{H}{T} = 0$ also $U = U(T)$.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*