Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Lösungsskizze Blatt 1

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen

a) Variablen paarweise unabhängig, $x = x(y,z) \Rightarrow \mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$ und $y = y(x,z) \Rightarrow \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z$. Dann $\mathrm{d}y$ in $\mathrm{d}x$ einsetzen:

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\right)\mathrm{d}z.$$

Aus Koeffizientenvergleich: $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$ (und $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 0$).

b) Variablen *paarweise* unabhängig, $x = x(y,w) = x(z,w) \Rightarrow \mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \mathrm{d}w \overset{(1)}{=} \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \mathrm{d}w$, und $y = y(z,w) \Rightarrow \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z \mathrm{d}w$. $\mathrm{d}y$ in $\mathrm{d}x$ einsetzen und durch (1) Koeffizienten vergleichen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z \mathrm{d}w\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \mathrm{d}w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \mathrm{d}w$$

Es folgt $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ (und $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z$).

c) Aus 1a) 'extra' Resultat: $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$. Mit 1a) folgt $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$

Aufgabe 2: Differentialformen vs. Vektorfelder

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\ &= (6y^2z - 6y^2z)\vec{e}_x + (0-0)\vec{e}_y + (2x-2x)\vec{e}_z = \vec{0}\end{aligned}$$

Also gibt es eine Lösung für $\nabla f = \partial_x f \vec{e}_x + \partial_y f \vec{e}_y + \partial_z f \vec{e}_z = \vec{F}$, durch Integration: $f(x,y,z) = x^2y + q(y,z) = x^2y + y^3z^2 + w(x,z) = y^3z^2 + r(x,y)$, also $f(x,y,z) = x^2y + y^3z^2$ ist eine Lösung.

b) Es gilt dass $\vec{G} = \vec{F} + \left(-2y\vec{e}_x - x\vec{e}_y\right)$, also $\nabla \times \vec{G} = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \left(-2y\vec{e}_x - x\vec{e}_y\right) = \vec{0} + (2-1)\vec{e}_z \neq 0$ also gibt es keine Lösung.

c) Ja, beide werden in $\mathbb{R}^3$ eindeutig durch die Funktion f definiert: $\vec{F} = \nabla f = \partial_x f \vec{e}_x + \partial_y f \vec{e}_y + \partial_z f \vec{e}_z \rightsquigarrow \mathrm{d}f = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_y f \mathrm{d}y + \partial_z f \mathrm{d}z$.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*