Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 5

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Gamma- und Zeta-Funktion

In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit einigen Integralen, welche in dieser Vorlesung oft zur Anwendung kommen werden, befassen.

Die Gamma-Funktion ist definiert als

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, dx.$$

Zeigen Sie damit folgende Eigenschaften

a) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

b) Welcher Wert ergibt sich für $\Gamma(\frac{1}{2})$?

c) Was erhält man für $\Gamma(n+1)$, wenn $n \in \mathbb{N}$?

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Gamma(n+1) = ne^{n\ln(n)} \int_0^\infty e^{n[\ln(y)-y]} dy$$

e) Für $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie folgende Approximation:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung von Aufgabenteil d) und entwickeln Sie $[\ln(y) - y]$ in einer Taylor-Reihe um dessen Maximum bis zum quadratischen Term.

Betrachten Sie als nächstes die Definition der Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

f) Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x \pm 1} dx = \begin{cases} \left(1 - 2^{1-s}\right) \zeta(s)\Gamma(s) & \text{, für } (+) \\ \zeta(s)\Gamma(s) & \text{, für } (-) \end{cases}$$

Hinweis: Geometrische Reihe im Integranden.

g) Werten Sie das letzte Integral jeweils für $s = 2, 3$ und 4 aus, Sie dürfen dabei ohne Beweis die folgenden Werte benutzen:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) \simeq \frac{7\pi^3}{180}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Aufgabe 2: Ensemble aus 3 Atomen

Wir betrachten eine Gesamtheit aus 3 identischen Atomen, von denen sich jedes in einem von 4 Energie-Eigenzuständen befinden kann: $H\,|\nu\rangle = \nu\epsilon\,|\nu\rangle$, wobei $\nu \in \{0,1,2,3\}$. Die Gesamtenergie des Systems betrage $E_{tot} = 4\epsilon$. Es soll keine Wechselwirkung zwischen den Atomen geben.
Wir möchten die Wahrscheinlichkeit $p_{i,\nu}$, dass das i-te Atom sich im Zustand $|\nu\rangle$ befindet, berechnen. Hängt $p_{i,\nu}$ von i ab? Zählen Sie dann die Anzahl der Konfigurationen, bei denen sich ein festes Atom im Zustand $|\nu\rangle$ befindet. Schliessen Sie nun, was die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind.

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die charakteristische Funktion $\varphi(k)$ einer Zufallsvariabel $X(x) = x$ mit Verteilungsfunktion $p(x)$ ist durch

$$\varphi(k) := \langle e^{ikX} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; e^{ikx} p(x),$$

definiert und das r-te Moment m_r ist durch

$$m_r := \langle X^r \rangle$$

definiert.

a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion, sowie die Momente μ_1 und μ_2 für die Laplace Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}} \;.$$

b) Berechnen Sie die Momente μ_1 und μ_2 für die Maxwell Verteilung

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Γ-Funktion aus Aufgabe 1.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*