Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 10

04.01.2020

1. Quantenmechanische Gesamtheiten *(Quantum mechanical ensembles)*

Betrachten Sie ein System, beschrieben durch einen 6-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ kann in Eigenräume des Hamiltonoperators H zerlegt werden, die Zerlegung sei:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{H}_i,$$

wobei der Eigenwert von H auf $\mathcal{H}_i$, $H|_{\mathcal{H}_i} = E_i$ sei, und $\dim \mathcal{H}_i = i$ sei.
(Consider a system described by a 6-dimensional Hilbert space $\mathcal{H}$. We can split this Hilbert space into the eigenspaces of the Hamiltonian H in the way written above. On the sub-space $\mathcal{H}_i$, the eigenvalue of H is given by $H|_{\mathcal{H}_i} = E_i$. The dimensions are given by $\mathcal{H}_i = i$.)

a) Betrachten Sie eine mikrokanonische Gesamtheit und geben Sie $S(E_i)$ an.
(Consider the microcanonical ensemble and find $S(E_i)$.)

b) Betrachten Sie eine kanonische Gesamtheit und geben Sie die Zustandssumme und den Mittelwert $\langle H \rangle$ an.
(Consider the canonical ensemble, find the partition function and the average energy $\langle H \rangle$.)

2. Drei-Zustand System *(Three-state system)*

Der Kern des Stickstoffisotops ^{14}N hat einen Spin von $1\hbar$. Falls der Kern räumlich fixiert ist (z.B. in einem Kristallgitter) führt der Spin dazu, dass der Kern drei Energieeigenzusände hat, deren Energieeigenwerte von der Projektion des Spins auf die z-Achse abhängen. Konkret gilt für die Energie E des Zustands mit Spinprojektion s_z (ε_0 bezeichnet eine kleine positive Energie):

s_z	E
$+\hbar$	$+\varepsilon_0$
0	0
$-\hbar$	$+\varepsilon_0$

(The nucleus of the nitrogen isotope ^{14}N has a spin of $1\hbar$. If the nucleus is located at a fixed location (i.e. in a crystal lattice), the spin causes the nucleus to have three energy levels. The energy depends on the projection of the spin onto the z-axis. The energy levels (as a function of the spin projection s_z) are given by the table above, where ε_0 is a small positive energy.)

a) Was ist im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spin des Kern nach oben zeigt (d.h. $s_z = +\hbar$)? In welchem Limes ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1/3?
(Let the system be in thermal equilibrium with the temperature T. What is the probability for the spin to point up (i.e. $s_z = +\hbar$)? In which limit does this probability equal 1/3?)

b) Berechnen Sie den Mittelwert der Energie $\langle H \rangle$. Welche Werte nimmt $\langle H \rangle$ in den Grenzfällen $T \to 0$ und ∞ an? Interpretieren Sie das Ergebnis.
(Compute the average energy $\langle H \rangle$. What is its value in the limits $T \to 0$ and ∞? Interpret the results.)

c) Was ist der Erwartungswert für die Spinprojektion $\langle s_z \rangle$?
(What is the expectation value for the spin projection $\langle s_z \rangle$?)