Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 6

19.11.2019

1. Idealer Paramagnet *(Ideal paramagnet)*

Betrachten Sie N unabhängige magnetische Momente in einem externen Magnetfeld H. Jedes Moment hat nur zwei mögliche Zustände $+m$ und $-m$, parallel oder anti-parallel zum Magnetfeld. Die Hamilton-Funktion für dieses System ist

$$\mathcal{H}(m_i) = -\sum_{i=1}^{N} H m_i \ , \quad m_i = \pm m \ .$$

Mit Hilfe der Magnetisierung

$$M = \sum m_i$$

lässt sich dies auch schreiben als

$$\mathcal{H}(m_i) = -HM \ .$$

Um im mikrokanonischen Ensemble arbeiten zu können, wollen wir die Energie fixieren, d.h. wir fixieren n, wobei n dadurch definiert ist, dass $\frac{1}{2}(N+n)$ Momente positiv orientiert sind, und $\frac{1}{2}(N-n)$ Momente negativ orientiert sind. Sie können die Formeln

$$\tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \quad \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \ |y| < 1$$

werwenden.

(Consider N independent magnetic moments in an external magnetic field H. Every moment has two possible states $+m$ and $-m$ (parallel and anti-parallel to the external field). The Hamiltonian is given by the first formula, which can be rewritten to $\mathcal{H}(m_i) = -HM$ using the magnetisation $M = \sum m_i$. If we want to describe the system in the microcanonical ensemble, we need to fix the energy. To do this, we fix n such that $\frac{1}{2}(N+n)$ moments have positive orientation and $\frac{1}{2}(N-n)$ have negative orientation. You may use the formulas above.)

a) Bestimmen Sie die Entropie $S(E,H)$. *(Find the entropy $S(E,H)$.)*

b) Berechnen Sie $E(T,H)$ und $M(T,H)$. Verwenden Sie hierzu, dass:

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{M}{T} dH - \frac{\mu}{T} dN \ .$$

Nähern Sie die Ableitung von $\ln n!$ wie folgt an:

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln n! \approx \ln n \ .$$

(Compute $E(T,H)$ und $M(T,H)$ using the identity and approximation above.)

c) Zeigen Sie, dass im Limes $Hm \ll kT$ die Magnetisierung das Curie-Verhalten zeigt

$$M = const \frac{H}{T}$$

und bestimmen Sie die Konstante.
(Show that in the limit $Hm \ll kT$, the magnetisation behaves according to Curie's law (as above), and find the constant in this case.)

2. Mikrozustände beim Schmelzen von Eis

Stellen Sie sich vor, einen Eisklotz (Volumen 18 cm^3) bei 0^o Celsius (= 273 K) langsam zu schmelzen. Man würde erwarten, dass es in der flüssigen Phase im Vergleich zu der festen Phase viel mehr Möglichkeiten gibt, die Wassermoleküle anzuordnen. Wir wollen uns in dieser Aufgabe einen Eindruck von den Größenordnungen verschaffen. Verwenden Sie die Konstanten

- $k = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K,
- Energie zum Schmelzen von Eis *(Energy required to melt ice)*: 3.34×10^5 J/kg.

(Let us consider a slowly melting ice cube of volume 18 cm^3 at 0^o C (= 273 K). One would expect that there are far more possiblilites to arrange the water molecules in the liquid phase compared to the solid phase. In this exercise we will look at the orders of magnitude involved. Use the constants above.)

a) Berechnen Sie das Verhältnis

$$R = \frac{\text{Multiplizität (flüssig)}}{\text{Multiplizität (fest)}} \ .$$

(Compute the fraction $R = \frac{\textit{multiplicity (liquid)}}{\textit{multiplicity (solid)}}$.)

b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis von R mit *(Compare your result for R to)*

(i) dem Alter des Universums (10 Milliarden Jahre) in Picosekunden (10^{-12} s).
(the age of the universe (10 billion years) in picoseconds (10^{-12} s).)

(ii) Dem Volumen des beobachtbaren Universums (Radius: 4.4×10^{26} m) in Planck-Volumen $V_p = (1.6 \times 10^{-35}\ \text{m})^3$.
(the volume of the observable universe (radius: 4.4×10^{26} m) in planck volumes $V_p = (1.6 \times 10^{-35}\ m)^3$.)