Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 3

01.11.2019

1. Gibbssche Phasenregel *(Phase rule)*

Wiederholen Sie die Gibbssche Phasenregel anhand eines Beispiels. Betrachten Sie hierzu ein System aus 2 verschiedenen Stoffarten in 4 verschiedenen Phasen bei vorgegebener Temperatur und Druck. (Neben den Phasen flüssig und gasförmig könnte es z.B. zwei unterschiedliche kristalline Phasen geben.) Chemische Reaktionen zwischen den Stoffarten sollen ausgeschlossen sein.
(Let us review the phase rule by studying an example. Consider a system of 2 components in 4 different phases at a given temperature and pressure. (For a practical example of a component with 4 phases, consider e.g. a material with a liquid, gaseous, and two different crystalline phases.) We assume that there will be no chemical reactions between the components.)

a) Wie lautet die Gleichgewichtsbedingung? Stellen Sie ein Gleichungssystem auf.
(Which condition is fulfilled at the equilibrium? Formulate a system of equations.)

b) Wovon hängen die chemischen Potentiale ab? Zählen Sie die Parameter.
(What do the chemical potentials depend on? Count the number of independent parameters of the system.)

c) Ist das Gleichungssystem lösbar?
(Is the system of equations solvable?)

d) Betrachten Sie nun den Fall von nur 3 Phasen. Wieviel dimensional ist der Lösungsraum?
(Now consider there case where there are only 3 phases. What is the dimension of the space of solutions?)

2. Maxwell Relationen

a) Der Druck P und das chemische Potential μ sind intensive Variablen und erfüllen daher

$$P(\lambda V, \lambda N) = P(V, N), \quad \mu(\lambda V, \lambda N) = \mu(V, N), \lambda \in \mathbf{R}_+ \; . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass daraus die folgenden Beziehungen resultieren:

$$V\frac{\partial P}{\partial V} + N\frac{\partial P}{\partial N} = 0, \quad V\frac{\partial \mu}{\partial V} + N\frac{\partial \mu}{\partial N} = 0. \tag{2}$$

(The pressure P and the chemical potential μ are intensive quantities and thus fulfill eq. (1). Show that this relation implies eq. (2).)

b) Die isotherme Kompressibilität ist gegeben durch

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} \tag{3}$$

Verwenden Sie das Ergebnis aus a) und die Maxwell Relationen, um zu zeigen, dass

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} \tag{4}$$

(The isothermal compressibility is given by eq. (3). Use a) and the Maxwell relations to show that this implies eq. (4).)