Blatt 13:

Ausgabe: Freitag, 24.01.20; Abgabe: Freitag, 31.01.20, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Variationsrechnung

Betrachten Sie ein Quantenteilchen der Masse m im unendlich tiefen Potentialtopf: $V(x) = 0$ für $-a < x < a$, und $V(x) = \infty$ sonst.

(1.a) (**4 Punkte**) Betrachten Sie den Variationsansatz $\langle x|\tilde{0}\rangle_\lambda = |a|^\lambda - |x|^\lambda$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass (wie in der Vorlesung behauptet) die Variationsenergie gegeben ist durch:

$$E_0(\lambda) = \frac{{}_\lambda\langle\tilde{0}|\hat{\mathcal{H}}|\tilde{0}\rangle_\lambda}{{}_\lambda\langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle_\lambda} = \frac{(\lambda+1)(2\lambda+1)}{(2\lambda-1)}\frac{\hbar^2}{4ma^2}. \tag{1}$$

(1.b) (**4 Punkte**) Berechnen Sie den optimalen Wert für λ bei dem $E_0(\lambda)$ minimiert ist. Berechnen Sie den minimalen Energiewert $\min_\lambda E_0(\lambda)$ und vergleichen Sie mit der exakten Grundzustandsenergie.

Aufgabe 2 Wechselwirkungsbild

Betrachten Sie einen ungestörten Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}_0$ und eine zeitabhängige Störung $\hat{V}(t)$,

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}(t). \tag{2}$$

(2.a) (**3 Punkte**) Betrachten Sie einen beliebigen zeitabhängigen Operator $\hat{A}(t) = \hat{A}_\mathrm{S}(t)$ im Schrödingerbild. Zeigen Sie dass der zugehörige Operator $\hat{A}_\mathrm{I}(t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar}\ \hat{A}_\mathrm{S}(t)\ e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar}$ im Wechselwirkungsbild folgende Gleichung erfüllt:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_\mathrm{I}(t) = [\hat{A}_\mathrm{I}(t), \hat{\mathcal{H}}_0] + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\mathrm{I}(t). \tag{3}$$

Dabei wird $\hat{A}_\mathrm{I}(\tau, t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}_0\tau/\hbar}\ \hat{A}_\mathrm{S}(t)\ e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0\tau/\hbar}$ als Funktion von τ und t aufgefasst, und wir verwenden die Schreibweisen $\hat{A}_\mathrm{I}(t) := \hat{A}_\mathrm{I}(\tau = t, t)$ sowie $\partial_t\hat{A}_\mathrm{I}(t) := \partial_t\hat{A}_\mathrm{I}(\tau, t)|_{\tau=t}$. Leiten Sie außerdem die Bewegungsgleichung für zeit-unabhängiges $\hat{A}_\mathrm{S}(t) \equiv \hat{A}_\mathrm{S}$ ab, die Sie auch in der Vorlesung kennengelernt haben.

(2.b) (**4 Punkte**) Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, $\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2$, mit einer zeitabhängigen Störung $\hat{V}(t) = -F(t)\hat{x}$. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $\hat{V}_\mathrm{I}(t)$ auf und lösen Sie diese soweit wie möglich: Betrachten Sie dazu die Bewegungsgleichung zur Zeit $t = 0$ und leiten Sie daraus einen allgemeinen Ansatz für $\hat{V}_\mathrm{I}(t)$ ab; Zeigen Sie dass dieser Ansatz eine allgemeine Lösung ermöglicht und diskutieren welche Bedingungen sich für den Ansatz ergeben.

Aufgabe 3 Rabi Formel

Betrachten Sie ein zwei-Zustands System mit dem ungestörten Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|$, wobei $E_2 > E_1$ sei. Eine zeitabhängige Störung sei gegeben durch

$$\hat{V}(t) = \gamma e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| + \gamma e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1|, \qquad \gamma, \omega \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{4}$$

(3.a) (**3 Punkte**) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Koeffizienten $c_{1,2}(t)$ der Wellenfunktion im Wechselwirkungsbild,

$$|\alpha(t)\rangle_{\mathrm{I}} = \sum_n c_n(t)|n\rangle, \tag{5}$$

auf. Hinweis: Verwenden Sie Ergebnisse aus der Vorlesung.

(3.b) (**6 Punkte**) Betrachten Sie die Anfangsbedingungen $c_1(0) = 1$ und $c_2(0) = 0$ und lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus (3.a). Beweisen Sie die Rabi-Formel:

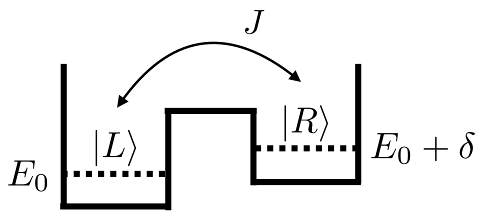
$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega - \omega_{21})^2/4} \sin^2\left\{\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}\right]^{1/2} t\right\}, \tag{6}$$

wobei $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$.

Aufgabe 4 Zeitabhängige Störungstheorie

Betrachten Sie ein Quantenteilchen im skizzierten Potential. Wir beschränken uns auf die niedrigsten beiden gebundenen Zustände $|L\rangle$ und $|R\rangle$, in denen sich das Teilchen im Grundzustand des linken ($|L\rangle$) bzw. des rechten ($|R\rangle$) Potentialkastens befindet. Die Kopplung zwischen den beiden Zuständen werden wir als Störung $\hat{V}$ behandeln:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = E_0|L\rangle\langle L| + (E_0+\delta)\ |R\rangle\langle R|, \qquad \hat{V} = J|L\rangle\langle R| + J|R\rangle\langle L|. \tag{7}$$



(2.a) (**6 Punkte**) Nehmen Sie an, das System sei im Anfangszustand $|\Psi(0)\rangle = |L\rangle$ initialisiert. Verwenden Sie das Wechselwirkungsbild und berechnen Sie $|\Psi(t)\rangle$ bis zu zweiter Ordnung in zeitabhängiger Störungstheorie, mit der Störung $\hat{V}$.