Blatt 12:

Ausgabe: Freitag, 17.01.20; Abgabe: Freitag, 24.01.20, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Feynman-Hellmann Theorem

Betrachten Sie einen Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}(\lambda)$, der kontinuierlich von einem Parameter λ abhängt. Damit hängen auch seine normierten Eigenzustände $E_n(\lambda)$ kontinuierlich von λ ab.

(1.a) (**4 Punkte**) Beweisen Sie unter diesen Bedingungen das Feynman-Hellmann Theorem:

$$\frac{\partial E_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle \psi_n(\lambda)| \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}(\lambda)}{\partial \lambda} |\psi_n(\lambda)\rangle \tag{1}$$

(1.b) (**5 Punkte**) Zeigen Sie unter Verwendung des Feynman-Hellmann Theorems aus (1.a) folgende Relationen für die Eigenzustände $\psi_{n,\ell,m} = Y_{\ell,m}(\theta,\phi)R_{n,\ell}(r)$ des Wasserstoffatoms:

$$\int d^3\boldsymbol{r}\ |\psi_{\ell,m,n}(\boldsymbol{r})|^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{1}{an^2}, \qquad a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \tag{2}$$

$$\int d^3\boldsymbol{r}\ |\psi_{\ell,m,n}(\boldsymbol{r})|^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} = \frac{1}{(\ell+1/2)a^2n^3}. \tag{3}$$

Hinweis: Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}_r$ der die reskalierte radiale Wellenfunktion $u_{n,\ell}(r) = rR_{n,\ell}(r)$ bestimmt:

$$\hat{\mathcal{H}}_r = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \qquad \hat{\mathcal{H}}_r\ u_{n,\ell}(r) = E_{n,\ell}\ u_{n,\ell}(r), \tag{4}$$

mit Eigenenergien (s. Herleitung in der Vorlesung, wo gezeigt wurde: $j_{\max} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$$E_{n,\ell} = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{(j_{\max}+\ell+1)^2}, \qquad n = j_{\max}+\ell+1. \tag{5}$$

Aufgabe 2 Entartete Störungstheorie

Betrachten Sie ein Spin-1 Teilchen, das durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = -\frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{S}^z\right)^2. \tag{6}$$

(2.a) (**5 Punkte**) Betrachten Sie eine Störung $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1$:

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \frac{\delta}{\hbar}\left((\hat{S}^x)^2 - (\hat{S}^y)^2\right). \tag{7}$$

Berechnen Sie das Spektrum des gestörten Hamiltonoperators zur zweiten Ordnung in δ/ω, unter der Annahme $|\delta| \ll |\omega|$. Sie dürfen annehmen dass $\omega > 0$.

(2.b) (**5 Punkte**) Betrachten Sie eine Störung $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1$:

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \delta \hat{S}^x. \tag{8}$$

Berechnen Sie das Spektrum des gestörten Hamiltonoperators zur zweiten Ordnung in δ/ω, unter der Annahme $|\delta| \ll |\omega|$. Sie dürfen annehmen dass $\omega > 0$.

Aufgabe 3 Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Im Folgenden betrachten wir als ungestörtes Problem den symmetrischen 2D harmonischen Oszillator. Mit den Leiteroperatoren $\hat{a}_\pm = (\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y)/\sqrt{2}$ lassen sich der Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}_0$ und der erhaltene Drehimpuls $\hat{L}_z$ schreiben als

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- + 1 \right), \qquad \hat{L}_z = \hbar \left(\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ \right), \tag{9}$$

siehe Aufgabe 1 auf Blatt 11. Verwenden Sie die ungestörten Eigenzustände $|n_+, n_-\rangle$.

(3.a) (**6 Punkte**) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator im externen Feld:

$$\lambda \hat{V} = -F\hat{x}. \tag{10}$$

Bestimmen Sie die Eigenenergien des gestörten Problems $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \lambda \hat{V}$ bis zu zweiter Ordnung in λ. Geben Sie dazu zunächst die zugehörigen *Auswahlregeln* an. Skizzieren Sie *alle* erlaubten *Übergänge* im entarteten Spektrum (betrachten Sie alle Zustände der Energie $E \leq 4\hbar\omega$), sowie das resultierende gestörte Spektrum.

(3.b) (**2 Punkte**) Wie lautet das exakte Spektrum des gestörten Problems aus Aufgabenteil (3.a)?