# (Weihnachts-) Blatt 10:

Ausgabe: Freitag, 20.12.19; Abgabe: Freitag, 10.01.20, 12:30 Uhr

**Aufgabe 1** Pöschl - Teller Potential

Betrachten Sie ein eindimensionales Quantenteilchen der Masse $M$ im sog. Pöschl - Teller Potential:

$$V(x) = -\alpha \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \frac{1}{\cosh^2(ax)}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

(1.a) (**3 Punkte**) Stellen Sie zunächst die Schrödingergleichung für dieses Problem auf. Zeigen Sie durch Verwendung der Variablensubstitution $u = \tanh(ax)$, dass die Schrödingergleichung folgende Form annimmt:

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{2M}(1-u^2)\partial_u \left[(1-u^2)\partial_u \psi(u)\right] - \alpha \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}(1-u^2)\psi(u) = E\psi(u). \tag{2}$$

(1.b) (**2 Punkte**) Unter welchen Bedingungen wird die Schrödingergleichung (2) zur Legendregleichung,

$$(1-u^2)\partial_u^2 \psi(u) - 2u\partial_u \psi(u) + \ell(\ell+1)\psi(u) - \frac{m^2}{1-u^2}\psi(u) = 0, \tag{3}$$

wobei $u \in [-1, 1]$ und $\ell, m \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq |m| \leq \ell$? Leiten Sie hieraus einen Ausdruck für $\alpha$ her und geben Sie die Eigenenergien $E < 0$ der gebundenen Zustände an.

(1.c) (**3 Punkte**) In der Vorlesung haben Sie bei der Herleitung der Kugelflächenfunktionen $\psi_{\ell,m}(\theta, \phi) = g(\theta)e^{im\phi}$ eine Funktion $g(\theta)$ eingeführt, welche folgender Differentialgleichung genügt:

$$\sin^2\theta \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{dg}{d\theta} - m^2 g = -\ell(\ell+1)\sin^2\theta\ g(\theta). \tag{4}$$

Die ganzen Zahlen $m, \ell$ erfüllen die selben Bedingungen wie in (1.b), $0 \leq |m| \leq \ell$. Zeigen Sie durch die Variablensubstitution $u = \cos\theta$, dass $g(u)$ die Legendregleichung (3) löst.

(1.d) (**4 Punkte**) Die Lösungen der Legendregleichung mit Parametern $\ell$ und $m$ sind die assozierten Legendre-Funktionen

$$P_\ell^m(u) = (1-u^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{du}\right)^{|m|} P_\ell(u), \tag{5}$$

wobei $P_\ell(u)$ das $\ell$-te Legendrepolynom ist. Verwenden Sie die Rodrigues-Formel,

$$P_\ell(u) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{du}\right)^\ell (u^2-1)^\ell, \tag{6}$$

und geben Sie explizit die drei energetisch niedrigsten Zustände des Pöschl - Teller Potentials mit $\lambda = 2$ und $\alpha = \hbar^2 a^2/M$ an. Gibt es mehr gebundene Zustände für diese Parameter?

**Aufgabe 2** Drehimpulsaddition

Betrachten Sie ein Elektron mit Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und Spin $s = 1/2$. Das Ziel dieser Aufgabe ist den Gesamtdrehimpuls $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ des Systems zu bestimmen.

(2.a) (**2 Punkte**) Geben Sie zunächst explizit eine Basis an, in der Bahndrehimpuls $\hat{\boldsymbol{L}}$ und Spin $\hat{\boldsymbol{S}}$ diagonal sind. Welche Dimension hat der Hilbertraum?

(2.b) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie zunächst im Fall $\ell = 0$ eine Eigenbasis des Gesamtdrehimpuls-operators und geben Sie die Eigenwerte von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}^z$ an. Welche zwei Gesamtdrehimuplse $J$ existieren für $\ell > 0$?

(2.c) (**10 Punkte**) Bestimmen Sie für die zwei möglichen Gesamtdrehimpulse $J$ aus (2.b) jeweils eine vollständige Eigenbasis von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}^z$. Drücken Sie die Basisvektoren explizit in der Eigenbasis von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}^z$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ und $\hat{S}^z$ aus.
Hinweis: Das Rekursionsproblem $\beta_{n+1} = ([2\ell + 1]^{-1/2} + \sqrt{n-1}\,\beta_n)/\sqrt{n}$ mit $\beta_1 = 0$ wird gelöst durch $\beta_n = \sqrt{(n-1)/(2\ell+1)}$.

**Aufgabe 3** Supersymmetrie

Betrachten Sie ein allgemeines quantenmechanisches Problem in einer Dimension, mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2M} + V_0(\hat{x}). \tag{7}$$

Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass $V_0(\hat{x})$ derart gewählt ist dass die Grundzustandsenergie $E_0 = 0$ verschwindet.

(3.a) (**4 Punkte**) Zeigen Sie, dass das Potential $V_0(x)$ mit der Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x) \in \mathbb{R}$ wie folgt zusammenhängt,

$$V_0(x) = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{(\partial_x^2 \psi_0(x))}{\psi_0(x)}. \tag{8}$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen dass der Hamiltonoperator durch verallgemeinerte Leiteroperatoren beschrieben werden kann:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{Q}^+ \hat{Q}^-, \quad (\hat{Q}^-)^\dagger = \hat{Q}^+. \tag{9}$$

Hinweis: $\hat{Q}^+$ ist von der Form $\hat{Q}^+ \propto (-\partial_x - w(x))$, für eine Funktion $w(x) \in \mathbb{R}$.

(3.b) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass $\hat{Q}^- \psi_0 = 0$.

(3.c) (**2 Punkte**) Berechnen Sie den zu $\hat{\mathcal{H}}_0$ gehörigen supersymmetrischen (SUSY) Partner,

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \hat{Q}^- \hat{Q}^+ = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2M} + V_1(\hat{x}). \tag{10}$$

Geben Sie das Potential $V_1(x)$, in Abhängigkeit von $\psi_0(x)$ und den zugehörigen Ableitungen, explizit an. Hinweis: die Differenz ergibt $V_1(x) - V_0(x) = -\frac{\hbar^2}{M}\left(\partial_x\left(\frac{(\partial_x \psi_0)}{\psi_0}\right)\right)$.

(3.d) (**4 Punkte**) Zeigen Sie, dass die Eigenzustände und Eigenenergien von $\hat{\mathcal{H}}_0$ und $\hat{\mathcal{H}}_1$ folgendermaßen zusammenhängen:

- Für Eigenvektoren $|\psi_n^{(0)}\rangle$ von $\hat{\mathcal{H}}_0$ mit Energie $E_n^{(0)} > 0$ (keine Grundzustände!) folgt, dass $\hat{Q}^-|\psi_n^{(0)}\rangle$ Eigenzustand von $\hat{\mathcal{H}}_1$ zur selben Energie $E_n^{(0)} > 0$ ist. Warum gilt der Zusammenhang nicht für Grundzustände mit $E_{n_0}^{(0)} = 0$? Normieren Sie $\hat{Q}^-|\psi_n^{(0)}\rangle$!
- Für Eigenvektoren $|\psi_n^{(1)}\rangle$ von $\hat{\mathcal{H}}_1$ mit Energie $E_n^{(1)} > 0$ folgt, dass $\hat{Q}^+|\psi_n^{(1)}\rangle$ Eigenzustand von $\hat{\mathcal{H}}_0$ zur selben Energie $E_n^{(1)} > 0$ ist. Normieren Sie $\hat{Q}^+|\psi_n^{(1)}\rangle$!

D.h., die Spektren und Eigenzustände der beiden Hamiltonoperatoren $\hat{\mathcal{H}}_0$ und $\hat{\mathcal{H}}_1$ können auseinander hergeleitet werden (außer im Grundzustand).

(3.e) (**6 Punkte**) Betrachten Sie nun wieder das Pöschl-Teller Potential, in der Form:

$$V_0(x) = \frac{\hbar^2 a^2}{2M}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\left(1 - \frac{2}{\cosh^2(ax)}\right), \qquad \text{für } \lambda = 1. \tag{11}$$

Berechnen Sie zunächst das zugehörige SUSY Potential $V_1(x)$ (Hinweise: Sie erhalten ein freies Teilchen; Sie können Ergebnisse aus Aufgabe 1 für den Grundzustand $\psi_0(x)$verwenden). Geben Sie die zugehörigen Eigenzustände $\psi_n^{(1)}$ mit Quantenzahlen $n$ und Eigenenergien $E_n^{(1)}$ explizit an. Bestimmen Sie dann unter Verwendung der Ergebnisse in Aufgabe (3.d) *alle* Eigenzustände des $\lambda = 1$ Pöschl-Teller Potentials aus Gl. (11). Was fällt Ihnen für die Streulösungen auf (Hinweis: werden einlaufende Wellen gestreut?)?