Blatt 9:

Ausgabe: Freitag, 13.12.19; Abgabe: Freitag, 20.12.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Überlagerte Wellenfunktionen im Topf

Ein Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a (s. Vorlesung) habe eine Anfangswellenfunktion, welche aus den ersten beiden stationären Lösungen zusammengesetzt ist:

$$\Psi(x, t=0) = A\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right). \tag{1}$$

(1.a) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie zunächst A. Berechnen Sie dann $\Psi(x,t)$ und $|\Psi(x,t)|^2$. Sie können die in der Vorlesungen bestimmten Eigenfunktionen des Potentialtopfs verwenden.

(1.b) (**2 Punkte**) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{x}(t) \rangle$ als Funktion der Zeit. Geben Sie Frequenz und Amplitude der erhaltenen Oszillationen an.

(1.c) (**2 Punkte**) Berechnen Sie $\langle \hat{p}(t) \rangle$ und den Erwartungswert der Energie, $\langle \hat{\mathcal{H}} \rangle$.

(1.d) (**2 Punkte**) Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem klassischen Fall. Betrachten Sie dazu ein klassisches Teilchen mit der Energie $E_{\text{kl}} = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle$.

Aufgabe 2 Tensorraum und Tensorprodukt

Hier betrachten wir ein Teilchen mit Spin $1/2$ in einem externen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ [Hilbertraum $\mathscr{H}_{\text{spin}} = \mathbb{C}^2$]. Es wird beschrieben durch den Hamiltonoperator:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{spin}} = -\hbar\gamma\; \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{2}$$

Zusätzlich betrachten wir ein externes Potential $V(x)$ (der Einfachheit halber in einer Dimension) in dem sich das Teilchen der Masse M bewegt. Die räumlichen Freiheitsgrade des Teilchens [Hilbertraum $\mathscr{H}_{\text{raum}} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$] werden beschrieben durch den Hamiltonoperator:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{raum}}(\sigma) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_\sigma(\hat{x}). \tag{3}$$

Insgesamt betrachten wir den Hilbertraum $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{spin}} \otimes \mathscr{H}_{\text{raum}}$.

(2.a) (**3 Punkte**) Zeigen Sie zunächst allgemein folgende Aussage: Sei $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ ein Tensorraum und seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren die auf den Hilberträumen $\mathscr{H}_A$ und $\mathscr{H}_B$ wirken. Dann wirkt der Operator $\hat{A} + \hat{B} \equiv \hat{A} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{B}$ auf $\mathscr{H}$ und ist hermitesch: Die zugehörigen Eigenzustände $\{|\lambda_A\rangle \otimes |\lambda_B\rangle\}_{\lambda_A, \lambda_B}$ mit Eigenwerten $\lambda_A + \lambda_B$ bilden eine Orthonormalbasis des Tensorraums, wobei $\hat{A}|\lambda_A\rangle = \lambda_A|\lambda_A\rangle$ und $\hat{B}|\lambda_B\rangle = \lambda_B|\lambda_B\rangle$.
Hinweise: (1) *Für zwei beliebige Zustände* $|\Psi_A\rangle \in \mathscr{H}_A$ *und* $|\Psi_B\rangle \in \mathscr{H}_B$, *und Operatoren* $\hat{O}_A$ *auf* $\mathscr{H}_A$ *und* $\hat{O}_B$ *auf* $\mathscr{H}_B$ *gilt:* $\left(\hat{O}_A \otimes \hat{O}_B\right)|\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle = \left(\hat{O}_A|\Psi_A\rangle\right) \otimes \left(\hat{O}_B|\Psi_B\rangle\right)$.
(2) *Das Skalarprodukt auf* $\mathscr{H}$ *ist:* $\left(\langle\Psi_A| \otimes \langle\Psi_B|\right)\left(|\Phi_A\rangle \otimes |\Phi_B\rangle\right) = \langle\Psi_A|\Phi_A\rangle\langle\Psi_B|\Phi_B\rangle$.

(2.b) (**3 Punkte**) Betrachten Sie nun den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{spin}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{raum}} \equiv \hat{\mathcal{H}}_{\text{spin}} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{\mathcal{H}}_{\text{raum}}, \tag{4}$$

und nehmen Sie ein spin-unabhängiges harmonisches Potential an: $V_\uparrow(x) = V_\downarrow(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Geben Sie eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $\mathscr{H}$ an. Bestimmen Sie dann das Spektrum des Hamiltonoperators. Skizzieren Sie, wie es von $|\boldsymbol{B}|$ abhängt.

(2.c) (**4 Punkte**) Betrachten Sie nun den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{spin}} \otimes \hat{1} + \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} |\sigma\rangle\langle\sigma| \otimes \hat{\mathcal{H}}_{\text{raum}}(\sigma) \tag{5}$$

mit einem spin-*ab*hängigen Potential: $V_\sigma(x) = \frac{1}{2}m\omega_\sigma^2 x^2$, wobei $0 < \omega_\downarrow < \omega_\uparrow$. Nehmen Sie außerdem an, dass gilt: $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ und $\hat{\sigma}^z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\hat{\sigma}^z|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$. Bestimmen Sie das Spektrum des Hamiltonoperators und skizzieren Sie es als Funktion von $|\boldsymbol{B}|$.

Aufgabe 3 Rechnungen zum Drehimpuls (Ergänzungen zur Vorlesung)

(3.a) (**2 Punkte**) In der Vorlesung wurde gezeigt: $\exp\left[-\frac{i}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}\varphi\right] = \hat{1}\cos(\varphi/2) - i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} \sin(\varphi/2)$. Geben Sie diese Matrix explizit in der Eigenbasis von $\hat{\sigma}^z$ an.

(3.b) (**3 Punkte**) Allgemeine Drehungen (Winkel φ um Achse $\boldsymbol{n}$) im $\mathbb{R}^3$ werden durch Drehmatrizen $R_{k,l}(\boldsymbol{n},\varphi)$ beschrieben. Pauli Spinoren transformieren dabei wie folgt, $\chi \to \exp\left[-\frac{i}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}\varphi\right]\chi$. Zeigen Sie exemplarisch für $\hat{\sigma}^x$ bei einer Drehung von φ um die z-Achse, dass Erwartungswerte $\chi^\dagger\hat{\sigma}^k\chi$ wie Vektoren im $\mathbb{R}^3$ transformieren:

$$\chi^\dagger\hat{\sigma}^k\chi \to \sum_l R_{k,l}(\boldsymbol{n},\varphi)\chi^\dagger\hat{\sigma}^l\chi. \tag{6}$$

(3.c) (**4 Punkte**) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Eigenspinoren $\chi_{n,\pm}$ für beliebige Raumrichtungen $\boldsymbol{n}$ — d.h. $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n})\chi_{n,\pm} = \lambda_{n,\pm}\chi_{n,\pm}$ mit $\lambda_{n,\pm} = \pm$ — gegeben sind durch:

$$\chi_{n,+} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\ e^{-i\phi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\phi/2} \end{bmatrix} \qquad \chi_{n,-} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\ e^{-i\phi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\phi/2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Reproduzieren Sie dieses Ergebnis, indem Sie die Eigenspinoren $\chi_{z,\pm}$ den beiden Drehungen unterwerfen, die $\boldsymbol{e}_z$ nach $\boldsymbol{n}$ drehen. Schreiben Sie dazu $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^T$.