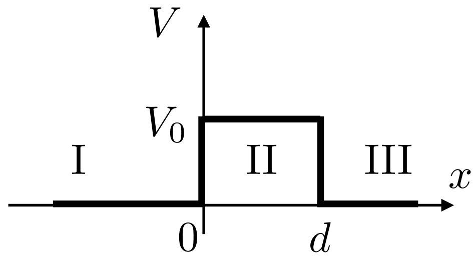
Blatt 8:

Ausgabe: Freitag, 06.12.19; Abgabe: Freitag, 13.12.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Ein Streuproblem

Betrachten Sie eine Potentialbarriere der Breite d und der Höhe $V_0 > 0$, s. Skizze:



(1.a) (**4 Punkte**) Betrachten Sie eine von links einlaufende ebene Welle $\Psi_{\mathrm{I}}(x) = e^{ikx}$ mit der Energie $E = \hbar^2 k^2/(2M) < V_0$. Geben Sie die Wellenfunktionen in den Bereichen I, II und III an. Wie lauten die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = d$?

(1.b) (**4 Punkte**) Berechnen Sie für $0 < E < V_0$ den Transmissions- und den Reflexionskoeffizienten T bzw. R. Skizzieren Sie die Abhängigkeit von E/V_0.

(1.c) (**4 Punkte**) Diskutieren Sie den Fall $E > V_0$. Hinweis: In der Vorlesung (Skript) wurde ein ähnliches Problem behandelt (allerdings mit $V_0 < 0$) – können Sie die dortige Lösung für unseren Fall $E > V_0 > 0$ verwenden?

Aufgabe 2 Hermite-Polynome

Die normierten Eigenzustände des harmonischen Oszillators können geschrieben werden als

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\beta^2 x^2/2} H_n(\beta x), \tag{1}$$

wobei $\beta^2 = M\omega/\hbar$ und $H_n(x)$ die aus der Vorlesung bekannten Hermite-Polynome sind.

(2.a) (**6 Punkte**) Bestimmen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Hermite-Polynome die Varianzen $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ und $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$. Hinweis: Unter anderem können Sie folgende aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften verwenden:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1), \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \delta_{n,m} 2^n n! \sqrt{\pi}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1). \tag{4}$$

(2.b) (**3 Punkte**) Durch das Anlegen eines Feldes (einer Kraft) kann ein harmonischer Oszillator angeregt werden. Das zugehörige Anregungspotential wird beschrieben durch den Operator $\hat{O} = qE\hat{x}$ (sogenannte Dipolnäherung), wobei q und E die elektrische Ladung des Quantenteilchens und das elektrische Feld bezeichnen. Berechnen Sie unter Verwendung von Gl. (1) die sogenannten Übergangsmatrixelemente

$$\langle \Psi_n | \hat{O} | \Psi_m \rangle \tag{5}$$

für allgemeine $n, m \in \mathbb{N}$. Welche Matrixelemente verschwinden nicht (sog. Auswahlregeln)?

Aufgabe 3 Überlagerte Wellenfunktionen im Topf

Diese Aufgabe wird in Blatt 9 bearbeitet.

Aufgabe 4 Geteilter harmonischer Oszillator

Betrachten Sie ein Quantenteilchen der Masse M in einer Dimension, in folgendem Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, & x > 0 \\ \infty, & x \leq 0 \end{cases} \tag{6}$$

(4.a) (**1 Punkt**) Welche Randbedingungen müssen die Wellenfunktionen erfüllen?

(4.b) (**5 Punkte**) Geben Sie die Eigenfunktionen in der Ortsbasis, und das Spektrum des zugehörigen Hamiltonoperators explizit an. Hinweis: Verwenden Sie bekannte Ergebnisse für den harmonischen Oszillator.