Blatt 7:

Ausgabe: Freitag, 29.11.19; Abgabe: Freitag, 06.12.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Zeitentwicklung kohärenter Zustände

(1.a) (**4 Punkte**) Betrachten Sie zunächst wieder den eindimensionalen harmonischen Oszillator, $\hat{\mathcal{H}}$ aus Gl. (7) von Blatt 6. Zeigen Sie, dass für einen Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$ der durch einen kohärenten Zustand $|\alpha_0\rangle$ gegeben ist, die Zeitentwicklung gegeben ist durch einen kohärenten Zustand mit zeitabhängiger Amplitude $\alpha(t) \in \mathbb{C}$:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}|\alpha(t)\rangle, \qquad \alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha_0. \tag{1}$$

(1.b) (**4 Punkte**) Zeigen Sie für die in (3.a) bestimmte Lösung, dass gilt:

$$\langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle = m\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle, \tag{2}$$

und geben Sie das Ergebnis explizit an.

(1.c) (**4 Punkte**) Betrachten Sie nun einen vollständig *an*harmonischen Oszillator der durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{an}} = \frac{U}{2}\hat{N}(\hat{N}-1), \qquad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{3}$$

Dabei bezeichnet U die Anharmonizität. Zeigen Sie für einen kohärenten Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$ und unter Verwendung von Gl. (1) von Blatt 6 dass für die speziellen Zeiten

$$t_m = m4\pi\hbar/U, \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

gilt (*revival*):

$$|\psi(t_m)\rangle = |\psi(0)\rangle. \tag{5}$$

Aufgabe 2 Delta-Funktion-Potential

Betrachten Sie in einer Dimension ein Teilchen mit der Masse m in folgendem Potential:

$$V(\hat{x}) = -\alpha\delta(\hat{x}), \tag{6}$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Dieses Potential besitzt gebundene Eigenzustände mit der Energie $E < 0$ und ungebundene Zustände, sogenannte Streuzustände, mit $E > 0$. Wir werden hier nur den Fall $E < 0$ betrachten.

(2.a) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung für $E < 0$ die Wellenfunktion $\Psi(x)$ des Teilchens getrennt für die Regionen $x < 0$ und $x > 0$. Zwischenergebnis:

$$\Psi(x) = Be^{\kappa x}, \qquad x < 0, \tag{7}$$
$$\Psi(x) = Fe^{-\kappa x}, \qquad x > 0, \tag{8}$$

wobei B, F und κ Konstanten sind.

(2.b) (**2 Punkte**) Welche Bedingung muss die Wellenfunktion am Punkt $x = 0$ erfüllen? Welche Relation besteht dann zwischen B und F?

(2.c) (**3 Punkte**) Warum ist $\partial\Psi(x)/\partial x$ nicht stetig bei $x = 0$? Bestimmen Sie den Sprung in der Ableitung der Wellenfunktion, $\Delta(\partial\Psi(x)/\partial x)$, an der Stelle $x = 0$. Integrieren Sie hierzu die Schrödingergleichung von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ und bilden Sie anschließend den Limes $\varepsilon \to 0$.

(2.d) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie mit Hilfe von $\Delta(\partial\Psi(x)/\partial x)$ und mit Hilfe von κ die Energie E. Normieren Sie nun die Wellenfunktion. Wie lautet das Endergebnis für $\Psi(x)$?

Aufgabe 3 Gaußsches Wellenpaket

Ein freies Teilchen der Masse m werde in einer Raumdimension durch die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ nehme die Wellenfunktion folgende Form an:

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2}, \tag{9}$$

wobei $A \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ konstant sind.

(3.a) (**2 Punkte**) Normieren Sie $\Psi(x, 0)$.

(3.b) (**4 Punkte**) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ des Teilchens zur Zeit t. Berechnen Sie hierzu die Fouriertransformierte von $\Psi(x, 0)$ und benutzen Sie deren Zeitentwicklung, um $\Psi(x, t)$ zu bestimmen.
Hinweis: (i) Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(\alpha x^2+\beta x)} dx$ lassen sich durch quadratische Ergänzung lösen. (ii) Das Ergebnis lautet:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2[1+2iat\hbar/m]^{-1}}}{\sqrt{1 + 2iat\hbar/m}} \tag{10}$$

(3.c) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie $|\Psi(x, t)|^2$. Beschreiben Sie das Verhalten von $|\Psi(x, t)|^2$ mit zunehmender Zeit. Skizzieren Sie hierzu $|\Psi(x, t)|^2$ als Funktion von x, zur Zeit $t = 0$ und $t > 0$.

(3.d) (**4 Punkte**) Berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$, sowie die zugehörigen Varianzen $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ und $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$. Hinweis: Hängen $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ von der Zeit ab?