Blatt 6:

Ausgabe: Freitag, 22.11.19; Abgabe: Freitag, 29.11.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Kohärente Zustände

Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ wird definiert als

$$|\alpha\rangle \equiv e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{1}$$

Hier, sowie im Folgenden, bezeichnen $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators.

(1.a) (**3 Punkte**) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ auch geschrieben werden kann als:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}_\alpha |0\rangle, \qquad \hat{D}_\alpha = \exp\left(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\right) \tag{2}$$

(1.b) (**3 Punkte**) Zeigen Sie, dass für den Auslenkoperator $\hat{D}_\alpha$ gilt:

$$\hat{D}_\alpha^\dagger = \hat{D}_\alpha^{-1}, \quad \text{und} \quad \hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = \hat{a} + \alpha. \tag{3}$$

(1.c) (**3 Punkte**) Zeigen Sie, dass $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ normiert ist. Berechnen Sie danach

$$\langle\alpha|\beta\rangle \qquad \text{und} \quad |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \tag{4}$$

für zwei beliebige kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$. Hinweis: Das Ergebnis ist $\langle\alpha|\beta\rangle = \exp[\alpha^*\beta - |\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2]$.

(1.d) (**4 Punkte**) Zeigen Sie, **dass ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ Eigenzustand des Absteigeoperators $\hat{a}$ mit Eigenwert α ist:**

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{5}$$

Gilt ein analoges Ergebnis auch für $\hat{a}^\dagger$? Hinweis: Diskutieren Sie dazu den Fall wenn $\hat{a}^\dagger$ auf $|0\rangle$ angewandt wird.

(1.e) (**4 Punkte**) Obwohl die kohärenten Zustände keine Orthonormalbasis bilden [siehe Aufgabe 1.c)] gilt eine Vollständigkeitsrelation:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1. \tag{6}$$

Beweisen Sie dieses Ergebnis. Dabei bezeichnet $d^2\alpha = d(\mathrm{Re}\alpha)\, d(\mathrm{Im}\alpha)$ das Integral über die komplexe Ebene. Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten in der komplexen α-Ebene.

Aufgabe 2 Kohärente Zustände und harmonischer Oszillator

Betrachten Sie im folgenden den Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 = \sum_n \hbar\omega \left(n + 1/2\right) \; |n\rangle\langle n|. \tag{7}$$

$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ bezeichne den Zahloperator.

(2.a) (**5 Punkte**) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ (siehe Aufgabe 1):

$$\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle, \quad \text{und} \quad \langle\alpha|\hat{\mathcal{H}}|\alpha\rangle. \tag{8}$$

Berechnen Sie außerdem die Orts- und Impulserwartungswerte:

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle, \quad \text{und} \quad \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle. \tag{9}$$

Hinweis: Wie hängt das Ergebnis mit $\mathrm{Re}\alpha$ und $\mathrm{Im}\alpha$ zusammen?

(2.b) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass für die Unschärfen von Orts und Impulsoperatoren gilt:

$$\langle n|(\Delta\hat{x})^2|n\rangle\langle n|(\Delta\hat{p})^2|n\rangle = (n + 1/2)^2\hbar^2. \tag{10}$$

(2.c) (**4 Punkte**) Berechnen Sie den gleichen Ausdruck wie in (2.b), jedoch für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$,

$$\langle\alpha|(\Delta\hat{x})^2|\alpha\rangle\langle\alpha|(\Delta\hat{p})^2|\alpha\rangle. \tag{11}$$