www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_19_20/T2_quant_mech

Blatt 5:

Ausgabe: Freitag, 15.11.19; Abgabe: Freitag, 22.11.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Spin Präzession

(1.a) (**5 Punkte**) Die Spin Präzession kann im Heisenberg-Bild beschrieben werden. Verwenden Sie den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{eB}{mc}\hat{S}^z = \omega \hat{S}^z \tag{1}$$

um die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $\hat{S}^x(t)$, $\hat{S}^y(t)$ und $\hat{S}^z(t)$ herzuleiten. Lösen Sie die Gleichungen und bestimmen Sie $\hat{S}^\mu(t)$ für $\mu = x, y, z$.

Aufgabe 2 Zeitabhängiger Kommutator

(2.a) (**4 Punkte**) Mit $\hat{x}(t)$ bezeichnen wir den Ortsoperator im Heisenberg-Bild eines freien Teilchens in einer Dimension. Der zugehörige Hamiltonoperator ist

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m}. \tag{2}$$

Berechnen Sie:

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]. \tag{3}$$

Aufgabe 3 Teilchen im Potential

(3.a) (**5 Punkte**) Betrachten Sie ein Teilchen in einer Dimension das durch den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{4}$$

beschrieben sei. Beweisen Sie folgende Relation,

$$\sum_{a'} |\langle a|\hat{x}|a'\rangle|^2 (E_{a'} - E_a) = \frac{\hbar^2}{2m}, \tag{5}$$

indem Sie $[[\hat{\mathcal{H}}, \hat{x}], \hat{x}]$ berechnen. Dabei bezeichne $|a\rangle$ den Eigenzustand von $\hat{\mathcal{H}}$, zur Eigenenergie E_a.

Aufgabe 4 Virial Theorem

(4.a) (**5 Punkte**) Betrachten Sie ein Teilchen in drei Dimensionen, das durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben sei:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\hat{\boldsymbol{x}}). \tag{6}$$

Berechnen Sie $[\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}]$ um zu zeigen dass

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \rangle = \left\langle \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{m} \right\rangle - \langle \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla V(\hat{\boldsymbol{x}}) \rangle \tag{7}$$

Um diesen Ausdruck als Virial Theorem zu identifizieren, muss die linke Seite verschwinden. Unter welchen Bedingungen ist dies der Fall?

Aufgabe 5 Teilchen in einer Kiste

Ein quantenmechanisches Teilchen sei in einer Box gefangen, die durch eine Trennwand in eine linke und eine rechte Hälfte unterteilt sei. Wenn das Teilchen sich mit Sicherheit in der linken (rechten) Hälfte befindet, sei sein quantenmechanischer Zustand mit $|L\rangle$ ($|R\rangle$) bezeichnet. Dabei betrachten wir keine räumlichen Variationen der Wellenfunktionen innerhalb der beiden Hälften der Box. Der allgemeinste quantenmechanische Zustand in diesem System kann geschrieben werden als

$$|\Psi\rangle = |R\rangle\langle R|\Psi\rangle + |L\rangle\langle L|\Psi\rangle, \tag{8}$$

wobei $\langle R|\Psi\rangle$ und $\langle L|\Psi\rangle$ als die Komponenten der Wellenfunktion betrachtet werden können. Wir nehmen weiterhin an, dass das Teilchen durch die Trennwand hinwegtunneln kann. Dieses Tunneln kann durch den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = \Delta\Big(|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|\Big) \tag{9}$$

beschrieben werden, wobei Δ eine reelle Zahl der Dimension Energie ist.

(5.a) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände und die zugehörigen Eigenenergien.

(5.b) (**4 Punkte**) Im Schrödinger-Bild sind die Basiszustände $|L\rangle$ und $|R\rangle$ zeitunabhängig, und der Zustandsvektor $|\Psi(t)\rangle$ verändert sich als Funktion der Zeit. Nun sei der Zustand $|\Psi(0)\rangle$ zur Zeit $t = 0$ wie in Gleichung (8) gegeben. Bestimmen Sie den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ für Zeiten $t > 0$ durch Anwendung des Zeitentwicklungsoperators des Systems auf $|\Psi(0)\rangle$.

(5.c) (**2 Punkte**) Nehmen Sie nun an das Teilchen sei zur Zeit $t = 0$ mit Sicherheit in der rechten Hälfte der Box anzufinden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Teilchen zur Zeit $t > 0$ in der linken Hälfte gefunden?

(5.d) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie die gekoppelten Schrödinger-Gleichungen für die Komponenten $\psi_R(t) = \langle R|\Psi(t)\rangle$ und $\psi_L(t) = \langle L|\Psi(t)\rangle$. Zeigen Sie dass die Lösungen dieser Gleichungen mit dem Ergebnis aus (5.b) übereinstimmen.