Blatt 4:

Ausgabe: Freitag, 08.11.19; Abgabe: Freitag, 15.11.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Unschärferelation

(1.a) (**2 Punkte**) Ein einfacher Weg die Schwarzsche Ungleichung ($\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$) zu zeigen geht folgendermaßen: Begründen Sie zunächst weshalb

$$(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)\,(|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle) \geq 0 \tag{1}$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$. Finden Sie dann ein geeignetes λ für welches Gl. (1) die Schwarzsche Ungleichung ergibt.

(1.b) (**3 Punkte**) Zeigen Sie dass das Gleichheitszeichen in der verallgemeinerten Unschärferelation $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2$ gilt wenn der betreffende Zustand $|\psi\rangle$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\Delta\hat{A}\;|\psi\rangle = \lambda\;\Delta\hat{B}\;|\psi\rangle, \qquad \text{mit } \lambda \in i\mathbb{R}. \tag{2}$$

(1.c) (**4 Punkte**) Für ein Gaußsches Wellenpaket mit Orts- und Impulserwartungswerten $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ – beschrieben durch eine Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ – gilt:

$$\langle y|\Psi\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4}\exp\left[\frac{i\langle\hat{p}\rangle y}{\hbar} - \frac{(y-\langle\hat{x}\rangle)^2}{4d^2}\right], \tag{3}$$

wobei $|y\rangle$ ein Ortseigenvektor ist: $\hat{x}|y\rangle = y|y\rangle$. Für ein solches Wellenpaket gilt die minimale Unschärferelation:

$$\sqrt{\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle} = \frac{\hbar}{2}. \tag{4}$$

Zeigen Sie dass die Bedingung

$$\langle y|\Delta\hat{x}|\Psi\rangle = \lambda\langle y|\Delta\hat{p}|\Psi\rangle, \qquad \text{mit } \lambda \in i\mathbb{R} \tag{5}$$

in der Tat erfüllt wird (womit aus (1.b) dann das Gleichheitszeichen folgt).

Aufgabe 2 Ein Spin-$1/2$ Problem

(2.a) (**4 Punkte**) Finden Sie die Linearkombination von $|+\rangle$ und $|-\rangle$ (den Eigenvektoren von $\hat{S}^z$) für welche das Unschärfeprodukt

$$\langle(\Delta\hat{S}^x)^2\rangle\langle(\Delta\hat{S}^y)^2\rangle = \max. \tag{6}$$

maximiert wird. Überprüfen Sie durch eine explizite Rechnung dass die Unschärferelation von $\hat{S}^x$ und $\hat{S}^y$ durch den gefundenen Zustand nicht verletzt wird.

Aufgabe 3 Orts und Impulsoperatoren

(3.a) (**3 Punkte**) Zeigen Sie für Funktionen $F(\boldsymbol{x})$ und $G(\boldsymbol{p})$ die durch ihre Taylorreihen dargestellt werden können, dass gilt:

$$[\hat{x}_\mu, G(\hat{\boldsymbol{p}})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial \hat{p}_\mu}, \qquad [\hat{p}_\mu, F(\hat{\boldsymbol{x}})] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_\mu}, \tag{7}$$

wobei $\mu = x, y, z, ...$ die Raumrichtung bezeichnet.

(3.b) (**3 Punkte**) Berechnen Sie (in einer Dimension) $[\hat{x}^2, \hat{p}^2]$. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der klassischen Poisson Klammer $\{x^2, p^2\}_{\mathrm{kl}}$.

Aufgabe 4 Verschiebeoperator

Der Translationsoperator für eine endliche (räumliche) Verschiebung um einen Vektor $\boldsymbol{r}$ ist:

$$\hat{\mathcal{T}}(\boldsymbol{r}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{r}\right), \tag{8}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{p}}$ den Impulsoperator bezeichnet.

(4.a) (**2 Punkte**) Berechnen Sie: $[\hat{x}_\mu, \hat{\mathcal{T}}(\boldsymbol{r})]$.

(4.b) (**3 Punkte**) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) [oder anders] wie sich der Erwartungswert $\langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle$ unter Translation $|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \hat{\mathcal{T}}(\boldsymbol{r})|\Psi\rangle$ verändert.

Aufgabe 5 Orts- und Impulswellenfunktionen

(5.a) (**4 Punkte**) Seien $|\Psi\rangle$ und $|\Phi\rangle$ beliebige Zustände. Beweisen Sie folgende Relationen:

$$(i) \qquad \langle q|\hat{x}|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q|\Psi\rangle$$

$$(ii) \qquad \langle \Phi|\hat{x}|\Psi\rangle = \int dq\ \phi_\Phi^*(q) i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\phi_\Psi(q),$$

wobei $\phi_\Psi(q) = \langle q|\Psi\rangle$ und $\phi_\Phi(q) = \langle q|\Phi\rangle$ Impulsraum-Wellenfunktionen sind.

(5.b) (**2 Punkte**) Erklären Sie die physikalische Bedeutung des Operators

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{x}q\right), \tag{9}$$

wobei q eine reelle Zahl mit Dimension Impuls ist.