Blatt 2:

Ausgabe: Freitag, 25.10.19; Abgabe: **Donnerstag**, 31.10.19, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 Unpolarisiertes Licht

In der Vorlesung haben wir Photonen in bestimmten Polarisationszuständen betrachtet, was durch einen der Apparatur vorgeschalteten Filter erreicht werden kann. Hier betrachten wir eine realistische Lichtquelle, aus der Licht im allgemeinen als ein *Gemisch* von Photonen mit verschiedener Polarisation austritt. Nun lernen wir die quantenmechanische Beschreibung einer solchen Situation kennen.

Zur Vereinfachung sei der Lichtstrahl gemischt aus Photonen aus 2 Quellen, wobei jede Quelle Photonen in einem bestimmten Polarisationszustand $|\Psi_1\rangle$ bzw. $|\Psi_2\rangle$ aussendet. Ein beliebiges Photon komme mit Wahrscheinlichkeit p_1 aus Quelle 1 (p_2 aus Quelle 2): $p_1 + p_2 = 1$.

(1.a) (**4 Punkte**) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert für den Spin eines Photons aus diesem Strahl (als das über viele Photonen gemittelte Messergebnis) durch

$$p_1\langle\Psi_1|\hbar\hat{S}|\Psi_1\rangle + p_2\langle\Psi_2|\hbar\hat{S}|\Psi_2\rangle \tag{1}$$

gegeben ist. Hinweis: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein einzelnes Photon links oder rechts polarisiert? (Hinweis: Der Operator $\hat{S}$ gibt die Helizität des Photons an. In der Basis $|L\rangle$, $|R\rangle$ von links bzw. rechts zirkulär polarisierten Photonen kann er dargestellt werden als: $\hat{S} = |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|$.)

(1.b) (**5 Punkte**) Wie lautet der Erwartungswert für den Spin eines Photons im Zustand

$$|\Psi\rangle = \alpha|\Psi_1\rangle + \beta|\Psi_2\rangle? \tag{2}$$

Zeigen Sie damit, dass viele Photonen in diesem einen Zustand im allgemeinen von dem in (1.a) betrachteten Gemisch verschieden sind. Wie müsste man die Form des obigen Zustands "relaxieren", d.h. von Photon zu Photon variieren lassen, so dass über viele Photonen gemittelt das Ergebnis von (1.a) erhalten wird? Interpretieren Sie physikalisch.

(1.c) (**3 Punkte**) Unpolarisiertes Licht ist Licht, das mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem beliebigen Polarisationszustand gefunden wird (Anmkerung: es gibt auch teilpolarisiertes Licht, das weder in einem bestimmten Polarisationszustand ist noch über alle gleichverteilt ist).

Zeigen Sie, dass Licht unpolarisiert ist, wenn für eine Orthonormalbasis $\{|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle\}$ das Licht mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Zustand $|\Phi_1\rangle$ bzw. $|\Phi_2\rangle$ ist.

Aufgabe 2 Dichtematrix - Grundlagen

(2.a) (**3 Punkte**) Ein Photon sei im (normierten) Zustand $|\Psi\rangle$. Wir definieren

$$\hat{P}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer physikalischen Größe, die durch den Operator $\hat{Q}$ dargestellt wird, durch

$$\mathrm{tr}\left(\hat{P}_\Psi \hat{Q}\right) \tag{4}$$

gegeben ist ($\mathrm{tr}\hat{\mathrm{A}} = \sum_\mathrm{i} \mathrm{A}_\mathrm{i}$ bezeichnet dabei die Spur ("trace") einer Matrix $\hat{A}$). Die Matrix $\hat{P}_\Psi$ nennt man die *Dichtematrix* des *reinen Zustands* $|\Psi\rangle$.

(2.b) (**4 Punkte**) Das Photon sei nun in einem Zustand, der aus einem Gemisch von einem (normierten) Zustand $|\Psi_1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit p_1, einem (normierten) Zustand $|\Psi_2\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit p_2, usw. besteht, mit $\sum_i p_i = 1$. Sei nun

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass für diesen *gemischten Zustand* der Erwartungswert einer physikalischen Größe $\hat{Q}$ durch

$$\langle\hat{Q}\rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\hat{Q}\right) \tag{6}$$

gegeben ist. Die Matrix $\hat{\rho}$ nennt man die *Dichtematrix* eines *gemischten Zustandes*.

(2.c) (**5 Punkte**) Zeigen Sie: (i) $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$; (ii) die Eigenwerte einer Dichtematrix sind reel und nicht negativ; (iii) die Summe der Eigenwerte einer Dichtematrix ist 1; (iv) $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \Leftrightarrow$ es liegt ein reiner Zustand vor.

Aufgabe 3 Dichtematrix - Licht

Verwenden Sie die Resultate aus 1) und 2), auch wenn Sie sie ggf. nicht hergeleitet haben.

(3.a) (**8 Punkte**) Geben Sie die Dichtematrix für unpolarisiertes Licht an [Hinweis: Definition in (1.c)]. Wir könnte man durch Messungen an einem Lichtstrahl feststellen, ob er unpolarisiert ist? Gibt es eine minimale Zahl von notwendigen Messungen?

(3.b) (**4 Punkte**) Geben Sie die Dichtematrix für einen gemischten Zustand an, der zu 50 Prozent aus in x-Richtung linear polarisiertem Licht besteht und zu 50 Prozent aus rechtszirkulär polarisiertem Licht. Bestimmen Sie zwei orthogonale Zustände, die die gleiche Dichtematrix ergeben.