Blatt 1:

Ausgabe: Freitag, 18.10.19; Abgabe: Freitag, 25.10.19, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 Lineare Algebra

(1.a) (**3 Punkte**) Zeigen Sie mit Hilfe von $d/dt(e^{At}e^{Bt})$ und einer daraus abgeleiteten Differentialgleichung die *Glaubersche Formel*

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{1}$$

unter der Voraussetzung $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

(1.b) (**4 Punkte**) Zeigen Sie die *Baker-Hausdorffsche Formel*

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + ... \tag{2}$$

Zeigen Sie dazu, dass $B(t) = e^{At}Be^{-At}$ die Integralgleichung

$$B(t) = B + \int_0^t d\tau\ [A, B(\tau)] \tag{3}$$

löst und iterieren Sie diese. Wir werden diese Formel später als Zeitentwicklung quantenmechanischer Größen interpretieren, die dann offensichtlich nur von den Kommutatoren abhängt.

Aufgabe 2 Delta Funktion

Ein in der QM sehr nützliches Konzept ist die von Dirac eingeführte Delta-Funktion. Sie wird uns ermöglichen Vollständigkeitsrelationen in Funktionensystemen mit kontinuierlichen Variablen darzustellen. Gleichzeitig können wir mit Hilfe der Delta-Funktion Projektionen auf ausgewählte Orte durchführen, was bei der Definition Green'scher Funktionen hilfreich sein wird. Strikt mathematisch ist die Delta-Funktion eine Distribution, d.h. ein linearer (Integral) Operator der durch seine Wirkung auf einen geeigneten Raum von Testfunktionen definiert ist. Im Folgenden werden wir auf mathematische Strenge verzichten, und definieren die Delta-Funktion $\delta(x)$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) = f(0) \tag{4}$$

für beliebige bei $x = 0$ stetige $f(x)$. D.h. die Delta-Funktion "pickt" im Integral den Funktionswert von $f(x)$ bei $x = 0$ heraus. Punktweise ausgedrückt bedeutet dies:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0, \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1. \tag{5}$$

(2.a) (**3 Punkte**) Die Delta-Funktion lässt sich approximieren durch eine Folge von Funktionen $\delta_n(x)$ mit den Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta_n(x) = 1, \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta_n(x) = f(0). \tag{6}$$

Zeigen Sie die erste Eigenschaft ohne Verwendung von Integraltafeln o.ä. (Hinweis: Residuenkalkül) für die folgenden Funktionenreihen:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{1}{2n} \\ n, & x \le -\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{2n} \\ 0, & x \ge \frac{1}{2n} \end{cases} \tag{7}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \tag{8}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2} \tag{9}$$

$$\delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} dt\ e^{ixt} \tag{10}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{2\cosh^2(nx)}. \tag{11}$$

Zeigen Sie außerdem die zweite Eigenschaft für die erste Funktionenfolge (Sie dürfen annehmen dass $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ durch ihre Taylor-Reihe genähert werden kann).

(2.b) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass $\delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(x - x_0)$.

(2.c) (**2 Punkte**) Zeigen Sie folgende Gleichung:

$$\delta\left((x - x_1)(x - x_2)\right) = \frac{\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)}{|x_1 - x_2|}, \qquad \text{für} \quad x_1 \neq x_2. \tag{12}$$

(2.d) (**2 Punkte**) Zeigen Sie für f mit $f'(x)$ stetig bei $x = 0$, dass:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x)f(x) = -f'(0). \tag{13}$$

(2.e) (**2 Punkte**) Zeigen Sie für eine Funktion f mit einfachen Nullstellen x_i (wieso?), deren Ableitung bei x_i stetig ist, dass:

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_i \left|f'(x_i)\right|^{-1} \delta(x - x_i) \tag{14}$$

(2.f) (**2 Punkte**) Zeigen Sie aus der letzten Funktionenfolge in Gl. (11), dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x} dy\ \delta_n(y) = \theta(x), \tag{15}$$

wobei $\theta(x)$ die Heaviside'sche Stufenfunktion ist:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{16}$$

D.h. also dass $\int \delta(x)dx = \theta(x)$ und $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$.

Aufgabe 3 Fourier Transformation

In der QM wird uns die Fourier Transformation regelmäßig begegnen wenn wir zwischen Orts- und Impulsdarstellung der quanten-mechanischen Wellenfunktion wechseln. Dies wird uns erlauben Differentialgleichungen auf einfache algebraische Gleichungen zurückzuführen und Symmetrien quantenmechanischer Systeme (Translationen in Raum und Zeit) auszunutzen.

Wir definieren die Fouriertransformation für Funktionen f die im unendlichen ausreichend schnell verschwinden:

$$F(k) = \mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-ikx} f(x), \tag{17}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; e^{ikx} F(k). \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

(3.a) (**2 Punkte**) Zeigen Sie die Konsistenz unserer Definition, d.h. dass Gl. (18) aus Gl. (17) folgt, bzw. dass:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f, \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}F = F. \tag{20}$$

(3.b) (**2 Punkte**) Zeigen Sie die *Parsevalsche Identität*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^*(x)g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; F^*(k)G(k). \tag{21}$$

(3.c) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass Ableitungen von der Fourier-Transformation in Produkte verwandelt werden:

$$F(k) = \mathcal{F}f \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}(df/dx) = ikF(k). \tag{22}$$

(3.d) (**2 Punkte**) Gegeben sei

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \; p(x - x')f(x'). \tag{23}$$

Zeigen Sie das *Faltungstheorem*:

$$\mathcal{F}g(k) = \sqrt{2\pi} \; \mathcal{F}p(k) \cdot \mathcal{F}f(k). \tag{24}$$