Blatt 0: Mathematische Grundlagen

Ausgabe: Freitag, 11.10.19; Abgabe: keine (**0 Punkte**)

Aufgabe 1 Lineare Algebra

Wir bezeichnen die normierten Basisvektoren eines unitären Vektorraums V (d.h. eines Vektorraums mit Skalarprodukt) mit dem Symbol $|n\rangle, n = 1, ..., \dim(V)$, und die dazu konjugierten Basisvektoren mit $\langle n|$ [1]. Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird mit $\langle u|v\rangle$ notiert, und wir betrachten Basisvektoren für die gilt: $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$. Eine Matrix A wird *hermitesch* genannt, falls $A^\dagger = A$ [wobei $(A^\dagger)_{n,m} = A^*_{m,n}$]; eine Matrix wird unitär genannt, falls $U^{-1} = U^\dagger$ gilt. Die Spur einer Matrix ist die Summe über ihre Diagonalelemente, d.h. in unserer Notation: $\mathrm{tr}(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$.

(1.a) Zeigen Sie die so genannte Zerlegung der Eins: $\sum_n |n\rangle\langle n| = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

(1.b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix reel sind und dass Eigenvektoren $|\lambda\rangle, |\lambda'\rangle$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \lambda'$ orthogonal sind [d.h. $\langle\lambda|\lambda'\rangle = 0$].

(1.c) Zeigen Sie, dass $[\exp(iA)]^\dagger = \exp(-iA^\dagger)$ und dass für B hermitesch $\exp(iB)$ unitär ist. Beachten Sie dabei, dass das Exponential einer Matrix einfach durch die Exponentialreihe definiert wird, also $\exp(A) = 1 + A + A^2/2 + ...$

(1.d) Zeigen Sie dass $\mathrm{tr}(ABCD...YZ) = \mathrm{tr}(ZAB...Y)$, d.h. unter der Spur darf zyklisch vertauscht werden.

(1.e) Zeigen Sie, dass die Spur einer beliebigen Matrix invariant unter unitären Transformationen ist und dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

(1.f) Zeigen Sie für eine hermitesche Matrix A, dass die Spur die Summe der Eigenwerte und die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Zeigen Sie dass $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ gilt.

(1.g) Die Pauli-Matrizen, die später bei der Behandlung des Spins eine große Rolle spielen werden, sind definiert durch

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass diese Matrizen hermitesch sind. Bestimmen Sie $\exp(-i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})$, wobei $\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha} = \sum_i \alpha_i \sigma_i$ mit reellen Zahlen α_i (den Komponenten des Vektors α).
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})^2$.

[1] Sie können dabei an Spaltenvektoren $|n\rangle = (z_1^{(n)}, ..., z_{\dim(V)}^{(n)})^T$ bzw. die zugeordneten komplex-konjugierten Zeilenvektoren $\langle n| = (z_1^{(n)*}, ..., z_{\dim(V)}^{(n)*})$ denken.

Aufgabe 2 Kommutatoren

Ein zentraler Begriff der Quantenmechanik ist der *Kommutator* (bzw. *Antikommutator*). Wir werden sehen, dass physikalische Größen durch hermitesche Matrizen beschrieben werden können. Die diesen zugeordneten Kommutatoren bestimmen sowohl ihre Messbarkeit als auch ihre zeitliche Entwicklung. Wir definieren für zwei hermitesche Matrizen A, B gleicher Dimension den Kommutator als

$$[A, B] = AB - BA \tag{2}$$

und den Antikommutator als

$$\{A, B\} = AB + BA. \tag{3}$$

Im folgenden sollen einige wichtige Beziehungen für (Anti)kommutatoren gezeigt werden. A und B seien hermitesch und gleicher Dimension.

(2.a) Zeigen Sie, dass $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$ und $\{A, B\}^\dagger = \{A^\dagger, B^\dagger\}$.

(2.b) Zeigen Sie, dass $i[A, B]$ hermitesch und $i\{A, B\}$ antihermitesch ist. [Eine Matrix A heißt antihermitesch wenn $A^\dagger = -A$].

(2.c) Zeigen Sie, dass $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ gilt.

(2.d) Zeigen Sie, dass $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobische Identität).

(2.e) Zeigen Sie, dass man für A und B einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren konstruieren kann, falls $[A, B] = 0$. Daraus werden wir später folgern, dass physikalische Größen, deren zugeordnete Matrizen kommutieren, gleichzeitig (im Prinzip) beliebig genau gemessen werden können.

(2.f) Kommutatoren von Funktionen von Matrizen: Sei $F(B)$ ein Polynom in B; die Ableitung nach B ist gegeben durch $(B^n)' = nB^{n-1}$. Nehmen Sie an, dass $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ und zeigen Sie, dass

$$[A, F(B)] = [A, B]F'(B). \tag{4}$$

(2.g) Ableitung von Matrizen: Man definiert die Ableitung einer Matrix A, die von einem Parameter t abhängt, durch

$$\frac{dA(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \tag{5}$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}. \tag{6}$$

Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt}e^{At} \tag{7}$$

und

$$\frac{d}{dt}(e^{At}e^{Bt}). \tag{8}$$

(2.h) Berechnen Sie die Kommutatoren und Antikomutatoren der in der vorigen Aufgabe definierten Paulimatrizen.