10. Vorlesung am 27.5.08

2 Aufgaben: Optik (Doppelsterne)

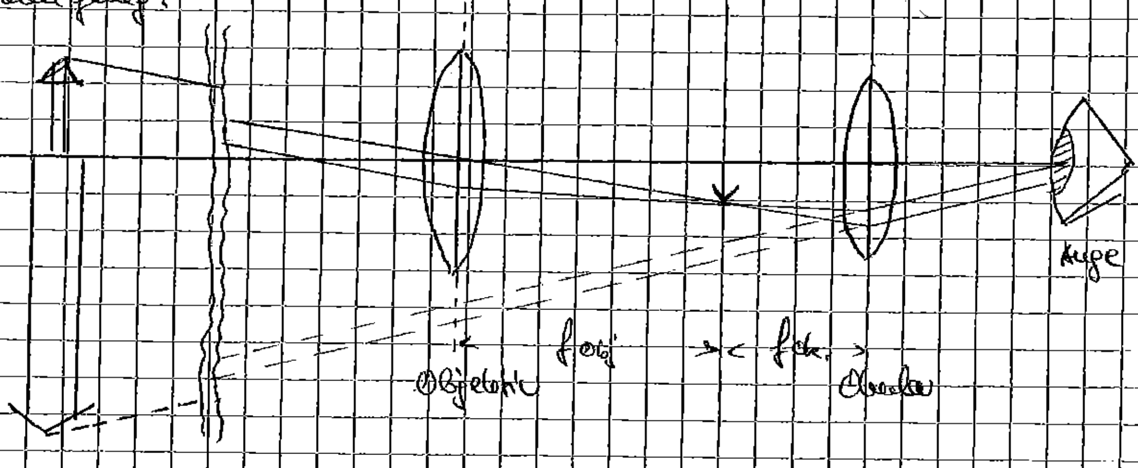
Festkörper (Metalle und Halbleiter)

Wiederholung:
- Strahlengang im Fernrohr
- Vergrößerung
- Sehwinkel
- Auflösungsvermögen
- Dopplereffekt

Fernrohr:

Optisches Linsensystem, mit dem man entfernte Objekte unter einem größeren Sehwinkel und daher scheinbar näher sieht.

Strahlengang:



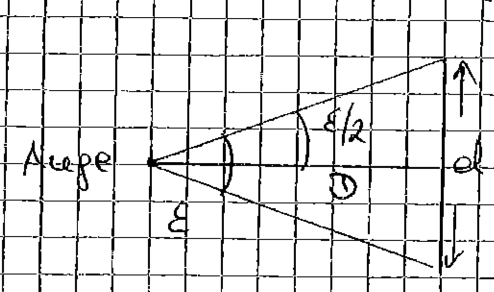
Objektiv: erzeugt reelles (= umgekehrtes) Zwischenbild eines weit entfernten Gegenstandes.

Okular: wirkt wie Lupe

Auge: sieht vergrößertes, virtuelles Bild in großer Entfernung (parallele Strahlen)

Vergrößerung:

$$\beta = \frac{\text{Sehwinkel mit Fernrohr}}{\text{Sehwinkel ohne Fernrohr}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{f_{obj.}}{f_{ok.}}$$



$\Rightarrow \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{d/2}{D} \approx \varepsilon/2$

(entferntes Objekt: D sehr groß)

$\Rightarrow \varepsilon = d/D$

$\Rightarrow \varepsilon' = \beta \cdot \varepsilon = \beta \cdot \frac{d}{D}$

<u>Auflösungsvermögen:</u> ≙ kleinste Winkelabstand zweier punktförmiger Lichtquellen, die gerade noch getrennt wahrgenommen werden können.

=> begrenzt durch Beugung an Linsen-Begrenzungen ("Apertur")

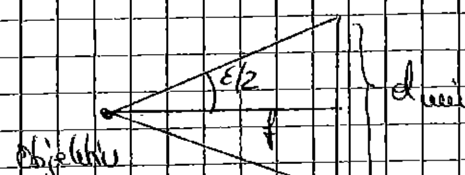
=> Punktobjekt erscheint als "Beugungsscheibchen"

=> Das Auflösungsvermögen steigt mit zunehmendem Durchmesser der Apertur optischer Instrumente und kürzer werdender Wellenlänge des verwendeten Lichts.

<u>Rayleigh-Kriterium:</u> 2 Objekte gerade noch getrennt wahrnehmbar, wenn bei den Beugungsscheibchen das Helligkeitsmaximum des einen Objekts auf dem 1. Beugungsminimum des 2. Objekts zu liegen kommt.

$$\boxed{d_{min} = 1.22 \cdot \frac{f\,\lambda}{a}}$$

a : Linsendurchmesser
λ : verwendete Wellenlänge
f : Brennweite der Linse



$$\Rightarrow \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{d_{min}/2}{f} \approx \sin\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\varepsilon = \frac{d_{min}}{f} = 1.22\,\frac{\lambda}{a}}$$

<u>Doppler-Effekt:</u>

allg.: Bewegen sich Quelle und Empfänger einer Welle relativ zueinander, so stimmt die Frequenz der abgestrahlten Welle nicht mit jener am Empfänger überein.

$$\boxed{f' = f_0 \cdot \frac{v \pm v_D}{v \mp v_S}}$$

v_D : Detektor-Geschwindigkeit
v_S : Sender-Geschwindigkeit

merke: "Aufeinander zu" ≙ Frequenz erhöht sich ($f' > f_0$)
"Voneinander weg" ≙ Frequenz erniedrigt sich ($f' < f_0$)

Elektromagnetische Wellen (Licht):

$$\boxed{f' = f_0 (1 \pm \beta)} \qquad \beta = v/c$$

"$-$": radiale Entfernung (z.B. Stern von Erde weg)

$\Rightarrow \lambda > \lambda_0$ Rotverschiebung

"$+$": radiale Annäherung

$\Rightarrow \lambda < \lambda_0$: Blauverschiebung

<u>Lösungsvorschlag:</u> <u>"Doppelstern"</u> (4)

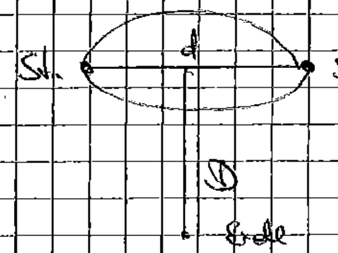
Doppelsternsystem: Entfernung $D = 3.15 \cdot 10^{17}$ m

gleiche Masse

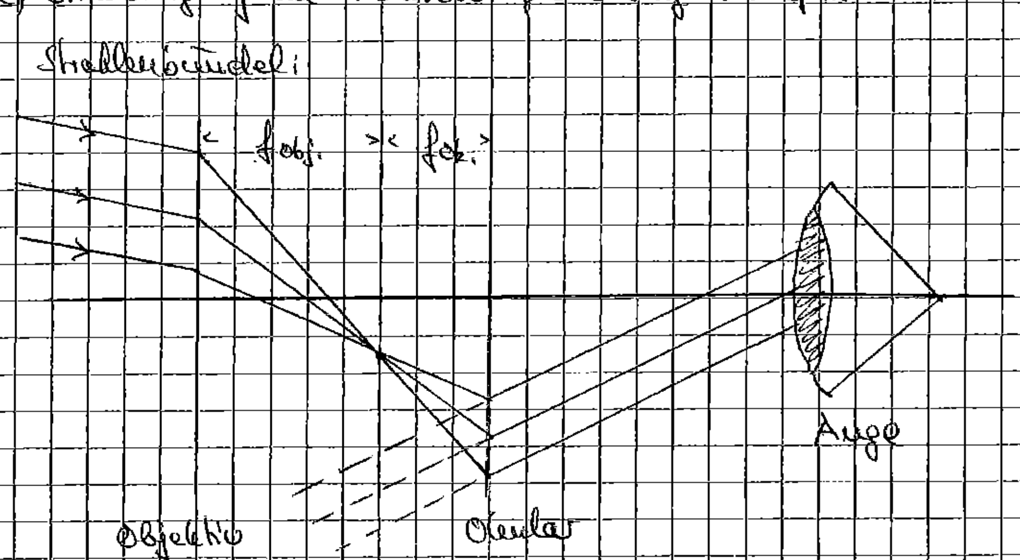
Abstand $d = 9.25 \cdot 10^{11}$ m

Lichtfrequenz $\nu = 5.65 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$

Fall 1



a) Strahlengang im Fernrohr für schräg zur optischen Achse einfallendes Strahlenbündel:



- Objektiv erzeugt vom weit entfernten Objekt ein reelles Zwischenbild
- dieses wird durch das Okular, das wie eine Lupe arbeitet, betrachtet.

⇒ Dem Auge erscheint daher ein vergrößertes, virtuelles Bild in großer Entfernung (parallele gestrichelte Strahlen).

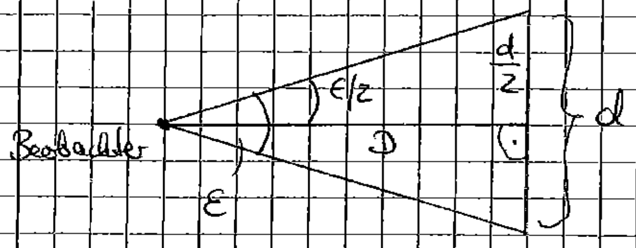
b) $f_{obj.} = 1.95$ m, $f_{ok} = 0.01$ m

⇒ Vergrößerung: $\beta = \frac{f_{obj.}}{f_{ok.}} = \frac{195\ cm}{1\ cm} = \underline{\underline{195}}$

Winkel zwischen beiden Sternen von Erde aus gesehen:

Sehwinkel ε' (wahrer Sehwinkel ohne Fernrohr: ε)

(Vergrößerung = $\frac{\text{Sehwinkel mit F}}{\text{Sehwinkel ohne}}$; Fernrohr = ε'/ε)



$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{d/2}{D} \approx \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{d}{D}$

$$\Rightarrow \varepsilon' = \beta \cdot \varepsilon = \beta \cdot \frac{d}{D} = 195 \cdot \frac{9{,}25 \cdot 10^{11}\,m}{3{,}15 \cdot 10^{17}\,m} = \underline{\underline{5{,}73 \cdot 10^{-4}}}$$

ε' in Grad: $180° = \pi$

$$\Rightarrow \varepsilon'[°] = \frac{5{,}73 \cdot 10^{-4}}{\pi} \cdot 180° = \underline{\underline{0{,}0328°}}$$

c) Durchmesser des Objektivs abschätzen, wenn Sterne gerade noch auflösbar sind:

sei $\varepsilon \approx \varepsilon = 1{,}22 \cdot \lambda/a$ a: Objektivdurchmesser

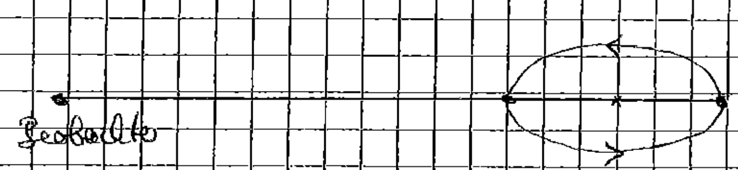
$= d/D$

$$\Rightarrow a = 1{,}22 \cdot \lambda \cdot \frac{D}{d} = 1{,}22 \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{D}{d} =$$

$$= 1{,}22 \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\,m/s}{5{,}65 \cdot 10^{14}\,s^{-1}} \cdot \frac{3{,}15 \cdot 10^{17}\,m}{9{,}25 \cdot 10^{11}\,m} = \underline{\underline{0{,}22\,m}}$$

Fall 2: Rotationsebene parallel zur Beobachtungsrichtung

$\Delta\lambda = 1{,}14\,nm$ $(= \lambda_{max} - \lambda_{min})$



$\Rightarrow$ Dopplereffekt

d) $\Rightarrow$ Bei gleicher Masse haben die Sterne gleiche Geschwindigkeiten

(Bahngeschwindigkeit $\ll c$)

$\Rightarrow$ Doppler-Effekt: (für Lichtwellen): $\boxed{f_{\pm} = f_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)}$

$-$: radial von Erde weg; $+$: radial auf Erde zu

$$\Rightarrow f_+ - f_- = f_0 \left(1 + \frac{v}{c} - 1 + \frac{v}{c}\right) = f_0 \cdot 2\frac{v}{c} = \Delta f$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\lambda_+} - \frac{c}{\lambda_-} = \frac{c}{\lambda_0} \cdot 2\frac{v}{c} \Rightarrow \cancel{c}\left(\frac{1}{\lambda_+} - \frac{1}{\lambda_-}\right) = \frac{\cancel{c}}{\lambda_0} \cdot 2\frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_+} - \frac{1}{\lambda_-} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot 2\frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_+ \lambda_-} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot 2\frac{v}{c} \quad , \quad \lambda_+ \approx \lambda_- \approx \lambda_0 \equiv \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot 2\frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda \cdot 2\frac{v}{c}$$

<u>Umlaufdauer im Doppelsternsystem:</u>

$$v = \omega \cdot r = 2\pi \hat{f} \cdot r = \frac{2\pi r}{T} \qquad \text{wo: } r = \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi d}{T \cdot 2} = \frac{\pi \cdot d}{T}$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\pi d}{cT} \Rightarrow T = \frac{2\pi d \lambda}{c \Delta\lambda} = \frac{2\pi d}{f \cdot \Delta\lambda}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 9.25 \cdot 10^{11}\,\text{m}}{5.65 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1} \cdot 1.14 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = \underline{\underline{9.02 \cdot 10^{6}\,\text{s}}} = \underline{104.4\ \text{Tage}}$$