LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla 1. Mai 2023

Übungen zu T3p Elektrodynamik im SoSe 2023
Blatt 3

Aufgabe 1: Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\mathbf{k})$ einer Funktion $f(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}\ f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{1}$$

Die inverse Fourier-Transformation lautet dann

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{2}$$

Die Funktion $f(\mathbf{x})$ erfülle im Folgenden die notwendigen mathematischen Voraussetzungen, sodass die Fourier-Transformierte existiert (was in der Physik praktisch immer der Fall ist). Nehmen Sie insbesondere an, dass $f(\mathbf{x})$ im Unendlichen verschwindet.

a) Zeigen Sie, dass die Delta-Distribution in der folgenden Form dargestellt werden kann

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3}$$

Hinweis: Fügen Sie im Exponenten einen Dämpfungsterm der Form $-\epsilon(|k_x| + |k_y| + |k_z|)$ mit $\epsilon > 0$ hinzu, sodass der Integrand im Unendlichen verschwindet. Betrachten Sie erst nach der Berechnung des Integrals den Grenzwert für $\epsilon \to 0^+$. Bei der Berechnung empfiehlt es sich wie folgt vorzugehen: Benutzen Sie die Eigenschaft $\int d^3x\ \delta(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0})$, welche die Delta-Funktion erfüllen muss, und lösen Sie das Integral mit dem obigen Dämpfungsterm. Für die Rechnung können Sie die Cauchysche Integralformel benutzen.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int dz\ \frac{f(z)}{z - z_0} \tag{4}$$

b) Zeigen Sie, dass die angegebene Form der inversen Fourier-Transformation mit der Definition der ursprünglichen Fourier-Transformation konsistent ist, d.h. berechnen Sie explizit die inverse Fourier-Transformation der Fourier-Transformierten von $f(\mathbf{x})$.

c) Zeigen Sie die Parsevalsche Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} f^*(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \tilde{f}^*(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k}). \tag{5}$$

d) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation Ableitungen in einfache Produkte verwandelt, d.h. berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\partial_i f(\mathbf{x})$.

e) Die Faltung zweier Funktionen $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$h(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}'). \tag{6}$$

Zeigen Sie das Faltungstheorem $\tilde{h}(\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k})$.

f) Skizzieren Sie die Funktion $f(\mathbf{x}) = \exp(-(1/2)a^2\mathbf{x}^2)$ als Funktion von x für konstantes y und z, berechnen Sie ihre Fourier-Transformierte und skizzieren Sie diese ebenfalls. Wie lässt sich das Resultat allgemein charakterisieren?

Aufgabe 2: Wellengleichungen

Gegeben sind die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) && (7)\\
\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 && (8)\\
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} && (9)\\
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0 && (10)
\end{aligned}$$

Leiten Sie direkt aus den freien Maxwell-Gleichungen, d.h. $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ in (7)-(10), die Wellengleichungen für das $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Feld her.

Aufgabe 3: Raum- und Zeitspiegelungen

a) Zeige Sie, dass die Maxwellgleichungen (7)-(10) invariant unter Zeitspiegelung $t \to -t$ sind. Das bedeutet, falls die Größen $E(\mathbf{r}, t), B(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die Maxwellgleichungen erfüllen, so müssen diese auch für die zeitgespiegelten Größen $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t'), \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t'), \rho'(\mathbf{r}, t')$ und $\mathbf{j}'(\mathbf{r}, t')$ gelten.
(*Hinweis:* Es ist $\rho'(\mathbf{r}, t') = \rho(\mathbf{r}, -t)$. Überlegen Sie, wie sich dann $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ unter Zeitspiegelung verhält. Aus den Maxwellgleichungen folgt dann das Transformationsverhalten der Felder.)

b) Zeigen Sie nun auch die Invarianz der Maxwell-Gleichungen unter Paritätstransformation $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.