LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla 24. April 2023

Übungen zu T3p Elektrodynamik im SoSe 2023
Blatt 2

Aufgabe 1: Differentialoperatoren

Verwenden Sie zur Berechnung der Darstellung der Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten in Teilaufgabe a) zunächst die aus der Vorlesung bekannten krummlinigen Koordinaten.

a) Berechnen Sie die Differentialoperatoren Gradient (grad), Divergenz (div) und Rotation (rot) in Kugelkoordinaten.

b) Berechnen Sie mit dem Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) den Ausdruck $\Delta\Phi(r, \theta, \phi)$. Bestimmen Sie dazu alle partiellen Ableitungen der Einheitsvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ und $\hat{e}_\phi$ nach den Koordinaten (r, θ, ϕ). Wenden Sie dann den Nabla-Operator ∇ aus Teil a) zweimal auf $\Phi(r, \theta, \phi)$ an.

Aufgabe 2: Helmholtz Theorem

Zeigen Sie, dass jede differenzierbare Vektorfunktion $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, die schneller als $1/r$ für $r \to \infty$ verschwindet, als Summe des Gradienten eines Skalars und der Rotation eines Vektors

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \left(-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) \tag{1}$$

ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 3: Magnetisches Vektorpotential

a) Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld $\mathbf{F}$, für das div $\mathbf{F} = 0$ gilt, als $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{A}$ geschrieben werden kann. Anleitung: Bestimmen Sie A_x, A_y und A_z, sodass $(\nabla \times \mathbf{A})_{\{x,y,z\}} = F_{\{x,y,z\}}$. Nehmen Sie dazu O.B.d.A. $A_x = 0$ an und lösen Sie die beiden letzten Gleichungen des Gleichungssystems, um A_y und A_z zu erhalten. Beachten Sie, dass die Integrationskonstanten wiederum selbst Funktionen von y

und z sind. Diese sind nur konstant bezüglich x. Dann setzen Sie die gefundenen Ausdrücke in die erste Gleichung des Systems ein und benutzen $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, um

$$A_y = \int_0^x F_z(x', y, z)dx' \text{ und } A_z = \int_0^y F_x(0, y', z)dy' - \int_0^x F_y(x', y, z)dx' \quad (2)$$

zu erhalten.

b) Überprüfen Sie mittels Differenzieren, dass $\mathbf{A}$ aus Aufgabenteil a) die Gleichung $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$ erfüllt. Ist $\mathbf{A}$ quellenfrei?

c) Bestätigen Sie nun für ein einfaches Beispiel, dass $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$ gilt, d.h. nehmen Sie $\mathbf{F} = y\hat{e}_x + z\hat{e}_y + x\hat{e}_z$ an und berechnen Sie $\mathbf{A}$ bzw. $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

Aufgabe 4: Linien- und Flächenintegrale

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{A} = (3x^2 + 2y, -9yz, 8xz^2)$. Bestimmen Sie das Linienintegral $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ über das Geradenstück C von $(0, 0, 0)$ bis (1,1,1).

b) Berechnen Sie den Fluß $\int_F \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} df$ des Vektorfeldes $\mathbf{B} = (3z, x, 2y)$ durch die Fläche $F : x^2 + y^2 + z^2 = R^2; x, y, z \geq 0$ mit $R > 0$. $\hat{\mathbf{n}}$ ist das vom Koordinatenursprung wegzeigende Normaleneinheitsfeld auf der Fläche F.