LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla 17. April 2023

Übungen zu T3p Elektrodynamik im SoSe 2023
Blatt 1

Aufgabe 1: Integralsätze

Leiten Sie aus dem Gaußschen Satz die folgenden nützlichen Integralidentitäten für skalare Felder $\varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ ab:

$$\int_V (\varphi\Delta\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi)d^3x = \oint_{\partial V} \varphi\nabla\psi\cdot d^2\mathbf{x} \quad \text{1. Greensche Identität} \tag{1}$$

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)d^3x = \oint_{\partial V} (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\cdot d^2\mathbf{x} \quad \text{2. Greensche Identität} \tag{2}$$

$$\int_V \nabla\varphi\, d^3x = \oint_{\partial V} \varphi\, d^2\mathbf{x} \tag{3}$$

Aufgabe 2: Vektoridentitäten

Leiten Sie für die Vektorfelder $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und das skalare Feld φ folgende Identitäten ab:

$$\nabla\times\nabla\varphi = 0 \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0 \tag{4}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a} \tag{5}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\mathbf{a} \tag{6}$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{a}) = \nabla\varphi\times\mathbf{a} + \varphi\nabla\times\mathbf{a} \tag{7}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) \tag{8}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}) \tag{9}$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} \tag{10}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{x} = 3 \qquad \nabla\times\mathbf{x} = 0 \quad \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{x}}{r^3} \tag{11}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n} = \frac{2}{r} \qquad \nabla\times\mathbf{n} = 0 \tag{12}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{n} = \frac{1}{r}(\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})) \equiv \frac{\mathbf{a}_\perp}{r}, \tag{13}$$

wobei $r \equiv |\mathbf{x}|$ und $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$ ist.
Hinweis: Es ist $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Aufgabe 3: Deltafunktion

Die definierenden Eigenschaften der δ-Funktion sind

$$\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq 0 \tag{14}$$

und

$$\int_V \delta(\mathbf{x})\, d^3x = 1, \quad \text{falls} \quad 0 \in V. \tag{15}$$

Zeigen Sie die Beziehung:

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta(\mathbf{x}). \tag{16}$$