3. Übung zur Vorlesung Atom- und Molekülphysik (E4) SS2023

Besprechung in der Woche vom 15.5.

Aufgabe 8 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Atom

Berechnen Sie für die Zustände 1s ($n = 1$, $l = 0$, $m = 0$) und 2p ($n = 2$, $l = 1$, $m = 0$) des Wasserstoffatoms die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons innerhalb eines Radius R für die Fälle

a) $R = 1\,\text{fm}$ (Kernradius),

b) $R = a_0$ (Bohr'scher Radius).

Berechnen Sie zusätzlich die gleichen Größen für ein Atom, das aus einem Proton und einem Myon besteht (Masse $m_\mu = 207 \cdot m_e$). Hier ist zu beachten, dass die Masse des Myons nicht vernachlässigbar gegenüber der Masse des Protons ist, ferner ergibt sich ein anderer Bohr'scher Radius a_0'.

Hinweis: für Berechnungen in a) ist es empfehlenswert, die Exponentialfunktion bei der Integration als konstant anzunehmen.

Aufgabe 9 Effektives Potential

Die Energien E_n des Wasserstoffatoms hängen nur von der Hauptquantenzahl n ab. Sie ergeben sich aus den Randbedingungen des Radialteils, der wiederum über das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ bestimmt wird:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)$$

mit $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Obwohl dieses Potential von der Drehimpulsquantenzahl l abhängt, gilt dies nicht für die bezüglich l entarteten Energien E_n.

Wie liegt E_n im Bezug zu V_{eff} für die erlaubten l?

Berechnen Sie dazu die Position r_{min} und den Wert des Minimums $V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$ des effektiven Potentials in Abhängigkeit von l. Vergleichen Sie für Zustände mit maximalem Drehimpuls $l = n - 1$ das Ergebnis $V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$ mit der Energie E_n.

Aufgabe 10 (nur E4) Lokalisierung und Energie

Wir betrachten einen lokalisierten Zustand eines Elektrons in 3 Dimensionen, beschrieben durch die Wellenfunktion

$$\Psi(r) = \frac{2}{b^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r}{b}}$$

mit einem Parameter b.

a) Wie stark ist das Elektron lokalisiert? Berechnen Sie dazu die Standardabweichung von $\hat{r}$.

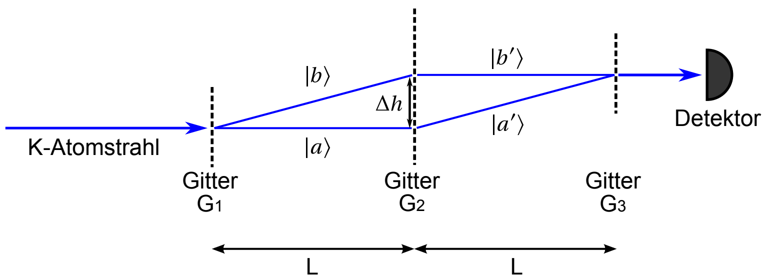
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle$ der kinetischen Energie.

c) Angenommen, dieses Elektron befindet sich im elektrostatischen Feld eines einfach positiv geladenen Kerns, welcher sich bei $r = 0$ befindet. Wie groß ist der Erwartungswert $\langle E_{\mathrm{pot}} \rangle$ der potentiellen Energie?

d) Skizzieren Sie den Verlauf von $E = \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle + \langle E_{\mathrm{pot}} \rangle$ in Abhängigkeit von b. Bestimmen Sie den Parameter b_{min}, bei welchem E minimal wird, und die dazugehörige Energie.

Aufgabe 11 Materiewellen-Interferometrie

Ein Materiewelleninterferometer wird mit einzelnen Kaliumatomen der Masse $m = 39\,\mathrm{u}$ betrieben. Die Atome bewegen sich im homogenen Gravitationsfeld der Erde, so dass auf sie das Potential $V = m \cdot g \cdot h$ wirkt. Die mittlere Geschwindigkeit der Atome sei $v_{\mathrm{Ka}} = 30\,\mathrm{m/s}$. Als Strahlteiler stehen drei freitragende Gitter mit einer Gitterkonstante von $G = 200\,\mathrm{nm}$ zur Verfügung. Am ersten Gitter G_1 spaltet der Atomstrahl durch Beugung kohärent in zwei Teilstrahlen $|a\rangle$ (0. Beugungsordnung) und $|b\rangle$ (1. Beugungsordnung) auf. Mit Hilfe eines zweiten Beugungsgitters G_2, das sich im Abstand L hinter dem ersten Gitter befindet, werden diese beiden Teilstrahlen so gebeugt, dass sie sich am dritten Beugungsgitter G_3 wieder treffen. Das Gravitationsfeld sei so schwach, dass man Pfadlängenänderungen im Interferometer aufgrund der Fallbewegung der Atome vernachlässigen kann.



a) Wozu dient das dritte Gitter G_3?

b) Wie groß muss der Abstand L zwischen dem ersten und dem zweiten Gitter gewählt werden, damit die beiden Teilstrahlen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ am zweiten Gitter eine Höhendifferenz Δh von $4\,\mathrm{mm}$ haben?

c) Berechnen Sie die Differenz $\Delta\lambda$ der de Broglie-Wellenlängen von Atomen in Teilarmen $|a\rangle$ und $|b'\rangle$. *Hinweis:* die Differenz ist klein, benutzen Sie eine geeignete Näherung.

d) Bestimmen Sie die volle Phasendifferenz $\Delta\phi$ der am dritten Gitter interferierenden Pfade $|a'\rangle$ und $|b'\rangle$. *Hinweis:* Für kleine Gravitationsfelder liefern die Pfade $|a'\rangle$ und $|b\rangle$ denselben Beitrag zu $\Delta\phi$, also $\Delta\phi = (\phi_b + \phi_{b'}) - (\phi_a + \phi_{a'}) = \phi_{b'} - \phi_a$.

e) Wir wollen nun die Empfindlichkeit des Interferometers verbessern. Wie schnell oder langsam müssen die Kaliumatome sein, damit eine Änderungen der Erdbeschleunigung von $\Delta g = 1.0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$ einer Phase von π entspricht? Wie lässt sich ansonsten das Interferometer verändern, um die Empfindlichkeit weiter zu steigern?