

1. Übung zur Vorlesung Atom- und Molekülphysik (E4) SS2023

Besprechung in der Woche vom 1.5.

Die Zuordnung zu den Übungsgruppen finden Sie auf der Vorlesungswebseite. Die Tutorien vom 1.5. werden online an einem Ersatztermin stattfinden. Den Link dazu wird Ihnen Ihr Tutor bzw. Ihre Tutorin an die **im LSF hinterlegte Mailadresse** schicken.

Aufgabe 1 Energieskala der atomaren Übergänge

In der Vorlesung wurde die Lichtemission von Natrium gezeigt. Dabei werden freie Atome angeregt und kehren dann in den Grundzustand zurück, wobei sie die Anregungsenergie in Form von Licht abgeben.

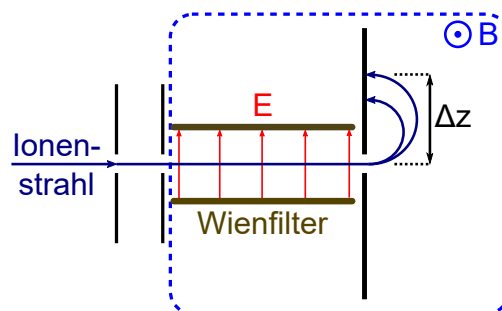
- Für Natrium beträgt die Wellenlänge von Photonen beim Übergang vom 1. angeregten Zustand in den Grundzustand (sog. D1-Linie) $\lambda = 589.76 \text{ nm}$. Welcher Energiedifferenz entspricht das in Joule (J) und in Elektronvolt (eV)?
- Welcher Frequenz ν und welcher Farbe entspricht diese Wellenlänge?
- Angenommen, diese Energiedifferenz würde nicht in Licht, sondern direkt in kinetische Energie des Natriumatoms umgewandelt werden, welche Geschwindigkeit v_1 hätte das Atom (anfangs in Ruhe) nach diesem Prozess?
- In Wirklichkeit ist ein Prozess aus c) nicht möglich und die Energie wird in Form eines Photons abgestrahlt. Dabei erfährt das Atom dennoch einen kleinen Rückstoß. Warum ist der Prozess aus c) nicht möglich?
Welche Geschwindigkeit v_2 hat das Atom (anfangs in Ruhe) nach dem Rückstoß?

Hinweis: die Masse des Natriumatoms beträgt ca. 23 u, wobei für eine atomare Masseneinheit gilt $1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Aufgabe 2 Massenspektroskop

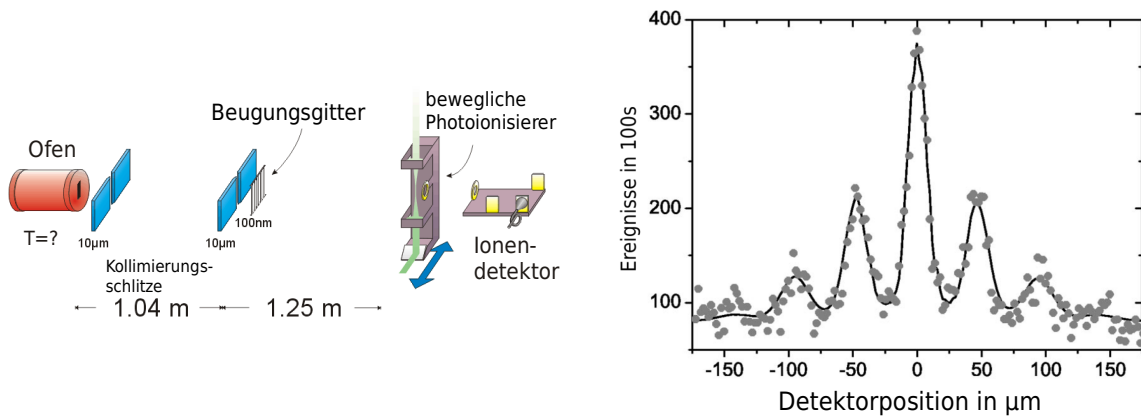
Bei einem Geschwindigkeitsfilter nach Wilhelm Wien durchfliegen geladene Ionen einen Bereich, in dem gleichzeitig ein elektrisches Feld E und ein magnetisches Feld B herrschen. Zur Massenbestimmung fliegen sie weiter im B -Feld auf einer Kreisbahn und treffen im Abstand Δz von der Eintrittsöffnung auf einen Schirm.

- Welche Geschwindigkeit haben einfach geladene Ionen, wenn sie den Bereich mit $E = 46.6 \text{ kV/m}$ und $B = 0.311 \text{ T}$ ohne Ablenkung passieren?
- Für zwei (einfach geladene) Ionensorten ergeben sich Abstände von $\Delta z = 12 \text{ cm}$ bzw. $\Delta z = 14 \text{ cm}$. Welche Massen haben diese Ionen?
- Welche Abstände Δz erhält man unter gleichen Bedingungen für die Sauerstoffisotope ^{16}O , ^{17}O und ^{18}O ?



Aufgabe 3 Beugung von Materiewellen am Gitter

Mit ausgefeilten Experimenten lässt sich die Wellennatur der Materie für immer größere und komplexere Objekte nachweisen. So wurde unter anderem mit Hilfe eines Beugungsgitters Interferenz von einzelnen C_{60} -Molekülen, sogenannten Buckminster-Fullerenen (“buckyballs”), beobachtet (siehe z.B. American Journal of Physics **71**, 319 (2003) bzw. Nature **401**, 680 (1999)). Dabei wurde ein C_{60} -Molekularstrahl aus einem Ofen (nach Geschwindigkeitsselektion) senkrecht auf ein Beugungsgitter mit einer Gitterkonstanten von 100 nm geschickt. 1.25 m hinter dem Gitter wurde die Verteilung der Moleküle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Strahls gemessen (siehe Bild).



- Berechnen Sie aus dem beobachteten Interferenzmuster die de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} der C_{60} -Moleküle und vergleichen Sie diese mit deren Durchmesser (ca. 0,7 nm).
- Bestimmen Sie, bei welcher *mittleren* Austrittsgeschwindigkeit aus dem Ofen die Moleküle die beobachtete Wellenlänge haben. Schätzen Sie daraus die Temperatur des Ofens ab.

Hinweis: die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} bei der Maxwell-Boltzmann-Verteilung beträgt $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Aufgabe 4 (nur E4) Dichtematrizen

Wir betrachten ein System mit zwei Basiszuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$.

- Für den Zustand $|\uparrow\rangle$ lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$$\rho = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Geben Sie die Dichtematrizen ρ der folgenden Zustände an:

- $|\downarrow\rangle$,
 - $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$,
 - $\sqrt{\frac{2}{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\downarrow\rangle$,
 - ein (inkohärentes) Gemisch aus $\frac{2}{3}$ Anteil $|\uparrow\rangle$ und $\frac{1}{3}$ Anteil $|\downarrow\rangle$.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert des (Pauli-)Operators $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ für die Zustände aus a).
 - Es sei ein unbekannter Zustand ρ gegeben. Bei Messungen in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ erhalten Sie die beiden Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit 0.5. Ist der Zustand ρ rein oder gemischt? Welche Messungen könnten ggf. dabei helfen, die beiden Fälle zu unterscheiden?