

# Übungsblatt ED 1

## E2/E2p Elektrodynamik, Prof. Braun, SoSe 2023

### Coulombgesetz, elektrisches Feld, Potential, Gaußsches Gesetz

#### Mündliche Aufwärmfragen

Definition der Ladungsdichte  $\rho$ , des elektrostatischen Potentials  $\phi$ ? Der Spannung  $U$ ? Was sind jeweils die Einheiten? Integralsatz von Gauss? Erstes Maxwell'sches Gesetz? Rotation des statischen E-Felds? Form der Feldverteilung an einer leitfähigen Spitze?

#### Aufgaben zum Vorrechnen

1. Coulombgesetz (einfach)

Ein Elektron wird durch ein über ihm befindliches Proton gegen das Gravitationsfeld der Erde in der Schwebelage gehalten. Unter der völlig unrealistischen Annahme, daß keine anderen geladenen Teilchen in der Nähe sind: wie groß ist der Abstand zwischen Elektron und Proton?

2. Elektrisches Feld (mittel)

Eine Punktladung  $Q$  befindet sich im Mittelpunkt eines Würfels mit Kantenlänge  $a$ . Welcher Wert hat das über eine Würfelwand erstreckte Integral  $\int \vec{E} \cdot d\vec{A}$  ?

3. Feld eines geladenen Drahtes (mittel).

Berechnen Sie mit dem Gauß'schen Satz das elektrische Feld innerhalb und außerhalb eines unendlich ausgedehnten, geladenen Drahtes mit einem Radius  $a$  und einer Ladungsdichte  $\rho$ . Tip: Betrachten Sie einfach einen Ausschnitt des Drahtes mit Länge  $l$  (dieser Parameter wird am Ende aus der Rechnung wieder herausfallen). Skizzieren Sie  $E(r)$ .

4. Rotationsfreiheit des E-Feldes (mittel)

Zeigen Sie, warum das Integral  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$  aus  $E = -\text{grad}\phi$  folgt. Dabei bezeichnet  $E$  das elektrische Feld und  $\phi$  sein Potential. Sie werden dazu benötigen, daß  $\text{rot grad}\phi = 0$ .

Können Sie das zeigen? Sie werden dazu brauchen

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \phi = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \phi$$

5. Feld einer geladenen Kugel (mittel)

(a) Leiten Sie aus dem Gaußschen Satz das elektrische Feld einer im inneren homogen geladenen Kugel mit Ladungsdichte  $\rho$  mit Radius  $a$  ab. Betrachten Sie  $r < a$  und  $r \geq a$  und skizzieren Sie  $E(r)$ .

(b) Wie groß ist das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel für den Fall, daß Elementarladungen mit einer Gitterkonstante von  $0.5\text{nm}$  in einem kubischen Gitter angeordnet sind und die Kugel einen Radius von  $a = 1\mu\text{m}$  hat?

(c) Vergleichen Sie das Feld für  $r > a$  mit dem eines Coulombfeldes einer Punktladung.

(d) Hätte man das elektrische Feld nicht einfacher aus der Poissongleichung  $\Delta\varphi = -\rho/\epsilon_0$  erhalten? Rechnen Sie am besten in Kugelkoordinaten, in denen für die radiale Abhängigkeit gilt:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

Überprüfen Sie das Ergebnis mit der Relation  $E_r = -\nabla_r \varphi = -\partial\varphi/\partial r$ .

(e) Nehmen Sie an, die Ladungen sind beweglich und werden an die Oberfläche der Kugel getrieben. Zeigen Sie, daß im oberen Fall die Relation an der Oberfläche der Kugel  $E = \sigma/\epsilon_0$  mit  $\sigma$  der Oberflächenladungsdichte gilt. Setzen Sie die Ladungsdichte aus Aufgabe (b) ein.

6. Nehmen Sie an, das elektrische Feld in einer Region wurde in Kugelkoordinaten gemessen und man findet dabei  $E = kr^3\hat{e}_r$  mit einer Konstanten  $k$ .

a) Berechnen Sie die Ladungsdichte  $\rho$ . Es kann praktisch sein, wenn Sie den Divergenzoperator entlang des Radius  $r$  in Kugelkoordinaten kennen:

$$\text{div} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2$$

b) Berechnen Sie - auf zwei Arten - die Gesamtladung, die in einer Kugel mit Radius  $R$  zu finden ist

7. Feld innerhalb eines halbkreisförmigen Ladungsverteilung (knifflig)

Eine Ladung  $Q$  ist gleichmäßig verteilt über einen genügend dünnen ringförmigen Draht mit halbkreisförmiger Form (Radius  $a$ ). Der Draht liegt in der  $x$ - $y$ -Ebene, sein Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Welche elektrische Feldstärke herrscht im Mittelpunkt des Halbkreises? Tip: ein Rechenweg integriert das Coulomb-Gesetz über die Länge des Drahtes.