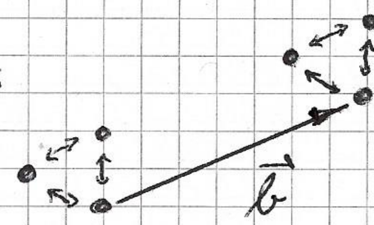
# 3.2. Impuls

Symmetrie: Homogenität des Raumes

Invarianz unter $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_a + \vec{b}$




für abgeschlossenes System mit

$$L(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a) = T(\dot{\vec{r}}_a) - U(\vec{r}_a) \equiv T(\dot{\vec{r}}_a) - U(\vec{r}_{a_1} - \vec{r}_{a_2})$$

$$\Rightarrow L(\vec{r}_a + \vec{b}, \dot{\vec{r}}_a) - L(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a) \doteq \vec{b} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \quad \overset{ELG}{\Rightarrow} \quad \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = 0$$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße $\boxed{\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a}$ (Gesamt-) Impuls

einzelne Impulse $\vec{p}_a = m_a \dot{\vec{r}}_a$, $\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a$ (auch mit WW)

Bemerkungen

1. $0 = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = - \sum_a \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \vec{F}_a$ $\quad \sum$ Kräfte $= 0$

   zwei Teilchen $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ $\quad$ actio $= -$ reactio

2. generalisierte Koordinaten

   $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ (auch mit äußerem Feld)

Def.: generalisierter Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$; generalisierte Kraft $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

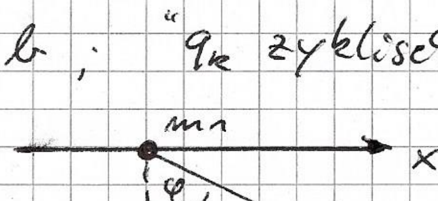
Falls $L$ unabh. von $q_k \in \{q_1, \dots, q_s\}$

$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, $L$ invariant unter $q_k \rightarrow q_k + b$; "$q_k$ zyklisch"

$\overset{ELG}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} p_k = 0$

$\underline{p_k \text{ erhalten}}$

<u>Beispiel</u>:




$p_x$ erhalten

## 3. Schwerpunkt (abgeschl. System $U = U(\vec{r}_{a_1} - \vec{r}_{a_2})$)

$IS \to IS'$ Relativgeschw. $\vec{V} = \text{const.}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_a = \vec{v}_a\,' + \vec{V}$

$\Rightarrow$ $\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a (\vec{v}_a\,' + \vec{V}) = \vec{P}\,' + \vec{V} \cdot \sum_a m_a$

$\Rightarrow$ $\exists \vec{V}$ so, dass $\vec{P}\,' = 0$ :

$$\vec{V} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a} = \frac{d}{dt} \vec{R} \qquad \text{mit } \vec{R} := \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}$$

Def.: $IS'$ (mit $\vec{P}\,' = 0$) Schwerpunktsystem

in $IS$: $\vec{V}$ ($\vec{R}$) Geschwindigkeit (Koordinaten) d. Schwerpunkts

$\Rightarrow$ $\vec{P} = \underbrace{\left(\sum_a m_a\right)}_{M \text{ Gesamtmasse (additiv)}} \vec{V}$ (analog $\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$)

Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a^{\,2} + U = \frac{1}{2} \sum m_a (\vec{v}_a\,' + \vec{V})^2 + U =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_a (\vec{v}_a\,'^2 + 2 \vec{v}_a\,' \cdot \vec{V} + \vec{V}^2) + U =$$

$$= E' + \vec{P}\,' \cdot \vec{V} + \frac{M}{2} \vec{V}^2$$

Def.: $E'$ im Schwerpunktsystem $IS'$ (mit $\vec{P}\,' = 0$)

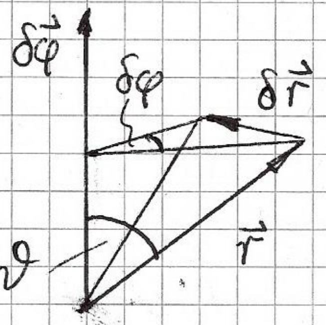
heißt innere Energie $E_{in}$

$\Rightarrow$ $\underline{E = E_{in} + \frac{M}{2} \vec{V}^2}$

# 3.3. Drehimpuls

Symmetrie: Isotropie des Raumes

Invarianz unter räuml. Drehungen $\vec{r}_a \to D\vec{r}_a \doteq \vec{r}_a + \delta\vec{r}_a$




Def.: Vektor $\delta\vec{\varphi}$:

$|\delta\vec{\varphi}| = \delta\varphi$, $\delta\vec{\varphi} \parallel$ Drehachse (Rechtsschraube)

$\delta\vec{r} \perp \delta\vec{\varphi}, \vec{r}$ $\qquad |\delta\vec{r}| = r \sin\vartheta \, d\varphi$

$\Rightarrow \delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$ oder $\underline{\delta r_i = \varepsilon_{ijk}\, \delta\varphi_j\, r_k}$

$\delta\varphi$ konstant $\Rightarrow$ $\underline{\delta v_i = \varepsilon_{ijk}\, \delta\varphi_j\, v_k}$

abgeschlossenes System, $L$ invariant

$$\delta L = L(r_i^a + \delta r_i^a, v_i^a + \delta v_i^a) - L(r_i^a, v_i^a) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial r_i^a} \delta r_i^a + \frac{\partial L}{\partial v_i^a} \delta v_i^a = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} p_i^a \, \varepsilon_{ijk}\, \delta\varphi_j\, r_k^a + p_i^a \, \varepsilon_{ijk}\, \delta\varphi_j \frac{d}{dt} r_k^a =$$

$$= \delta\varphi_j\, \varepsilon_{jki} \frac{d}{dt}(r_k^a p_i^a)$$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße $\boxed{L_i = \sum_a \varepsilon_{ijk}\, r_j^a\, p_k^a}$ (Gesamt-) Drehimpuls

oder $\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a$

einzelne Drehimpulse $\vec{l}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a$, $\vec{L} = \sum_a \vec{l}_a$

(additiv, auch mit WW)

# Bemerkungen

1. Verschieben des Koord. ursprungs $\qquad \vec{r}_a = \vec{r}_a{}' + \vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_a \big(\underbrace{\vec{r}_a{}' + \vec{b}}_{\vec{r}_a}\big) \times \vec{p}_a = \vec{L}' + \vec{b} \times \vec{P}$$

im Schwerpkt. syst. : $\vec{P} = 0$, $\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}'$, unabh. v. Koord. ursprung

2. Inertialsystem $IS \to IS'$

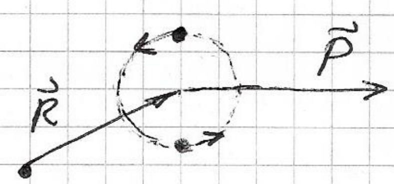
$$\vec{r}_a = \vec{r}_a{}' + \vec{V}t \qquad \vec{v}_a = \vec{v}_a{}' + \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a = \sum_a m_a (\vec{r}_a{}' \times \vec{v}_a{}') + \sum_a m_a \underbrace{\vec{r}_a{}' \times \vec{V}}_{= \vec{r}_a \times \vec{V}} + \sum_a m_a \vec{V} \times \vec{v}_a{}' \, t =$$

$$= \vec{L}' + M\vec{R} \times \vec{V} + \vec{V} \times \vec{P}' \cdot t$$

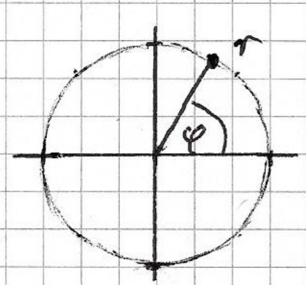
$\vec{P} = \vec{P}' + M\vec{V}$ ; falls $IS'$ Schwerpkt. syst. $\Rightarrow \vec{P}' = 0$, $\vec{P} = M\vec{V}$

$$\underline{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \times \vec{P}}$$




$\vec{L}'$ Eigen-drehimpuls

3. Zylindersymmetrie




Invarianz bez. Drehung um z-Achse, $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$

$\varphi$ zyklisch $\Rightarrow \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ erhalten ; $L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = L_z$$

4. Noether theorem (allg.) :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \xrightarrow{\text{Trafo v. } q_i, t} L + \frac{d}{dt} f(q_i, t)$$

$\Leftrightarrow$ Erhaltungssatz $\frac{d}{dt} Q = 0$

# 5. Unabhängige Bewegungskonstanten
(= Erhaltungsgrößen)

$L(q_i, \dot{q}_i)$ $\quad i = 1, \dots, s$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ $\quad$ s DGL 2. Ordnung

$\to$ 2s Integrationskonstanten

$$q_i(t) = q_i(t - t_0, c_1, \dots, c_{2s-1})$$

$$\dot{q}_i(t) = \dot{q}_i(t - t_0, c_1, \dots, c_{2s-1})$$

abgeschlossenes System $\to$ Zeitnullpunkt $t_0$ beliebig $\hat{=}$ 1 Konst.

$\Rightarrow$ $\boxed{2s - 1}$ unabh. Konstanten

<u>Beispiel:</u>

$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = c_1 \Rightarrow x(t) = c_1 t + c_2$

$\Leftrightarrow x(t) = c_1(t - t_0)$

$s = 1$, $2s - 1 = 1$ unabh. Konst. $c_1 = \dot{x} = v$

$E = \frac{m}{2}v^2$, $p = mv$, beide erhalten, aber nicht unabh.