Vorbemerkung

Def.: $f(x_k)$ homogene Funktion vom Grad n

falls $\qquad f(\alpha x_k) = \alpha^n f(x_k) \qquad (1)$

Beispiele:

homogen vom Grad 2: $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$f = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

nicht homogen: $f = x_1^2 + x_2$

$$\frac{d}{d\alpha} f(\alpha x_k) = \sum_i x_i \frac{\partial f(\alpha x_k)}{\partial \alpha x_i} \overset{(1)}{=} n\,\alpha^{n-1} f(x_k)$$

$$\Rightarrow \sum_i \alpha x_i \frac{\partial f(\alpha x_k)}{\partial \alpha x_i} = n\, f(\alpha x_k) \quad \overset{\alpha x_j \to x_j}{\Longrightarrow}$$

$$\underline{\sum x_i \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_i} = n\, f(x_k)}$$

Eulers Theorem über homogene Funktionen

Anwendung auf kin. Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}(q)\, \dot{q}_j \dot{q}_k$$

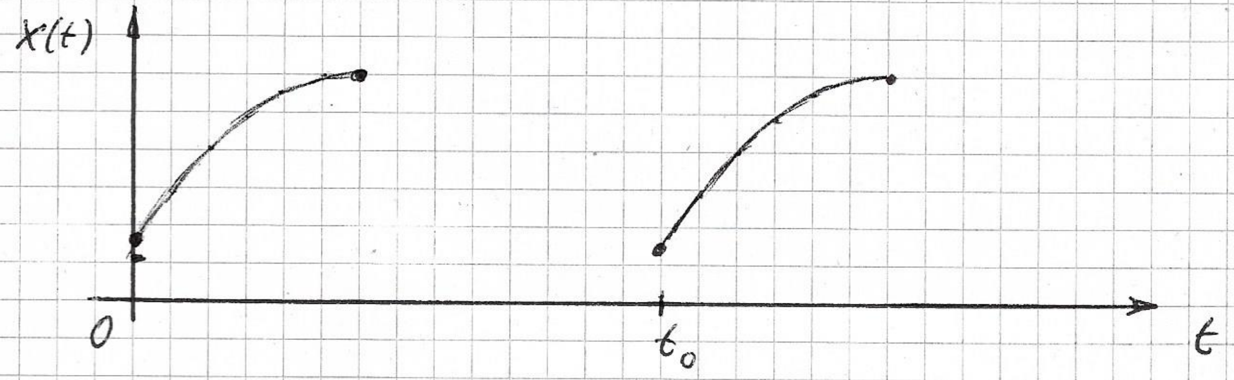
$\rightarrow$ homogene Funktion vom Grad 2 in $\dot{q}_i$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T}$$

3.1. Energie

Symmetrie: Homogenität der Zeit

Invarianz der Bewegungsgesetze unter $t \to t + t_0$



Konsequenz:

Für abgeschlossenes System $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$

keine explizite Zeitabhängigkeit $\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i =$$

$$\overset{ELG}{=} \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße $\boxed{E := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}$

<u>Energie</u>

$$\underline{E} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \underbrace{\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}}_{2T} - (T - U) = \underset{\text{kin.}}{T(q_i, \dot{q}_i)} + \underset{\text{pot.}}{U(q_i)}$$

Energie