Allgemeine Eigenschaften der Lagrangefunktion

Hamilton-Prinzip: $\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

- Eichinvarianz

$L(q,\dot{q},t)$ äquivalent zu $L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$

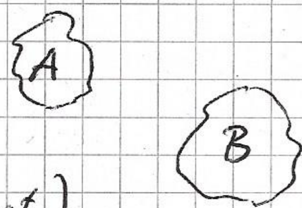
Beweis:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L'(q,\dot{q},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \right) =$$

$$= S + \underbrace{f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)}_{\text{konstant}} \quad \Rightarrow \delta S' = 0 \Leftrightarrow \delta S = 0$$

- Additivität

Teilsysteme A, B, ohne Wechselwirkung



$\rightarrow$ ELG von A unabh. von B (und umgekehrt)

$\rightarrow L_{ges} = L_A + L_B$

- Lagrangefkt. eines freien Teilchens (für IS; Kart. Koord.)

$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$, aus $L = L(\dot{\vec{r}})$, Galilei-Invarianz (D_{ij}, a_i, t_0, V_i)

$m > 0$ (wegen Prinzip der kleinsten Wirkung)
(sonst S nach unten unbeschränkt)

- System von N freien Teilchen

Additivität $\Rightarrow \quad L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}$

Multiplikation mit beliebigem Faktor $\rightarrow$ ELG invariant

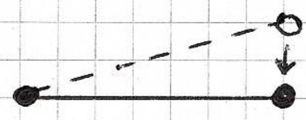
$\Rightarrow$ nur Massenverhältnisse relevant

- N Teilchen mit Wechselwirkung

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) \equiv T - U$$

(Form von U definiert Klasse der hier betrachteten Systeme)

- $U(\vec r_j)$: Ausbreitungsgeschw. d. WW $= \infty$



- falls $\partial U / \partial t = 0$ $\rightarrow$ System abgeschlossen
- $L(\vec r_i, \dot{\vec r}_i)$ invariant unter $\boxed{t \rightarrow -t}$ (Zeitumkehr)

$\rightarrow$ Bewegung reversibel: $\vec r_i(t)$ Lsg. d. ELG $\Rightarrow$ $\vec r_i(-t)$ Lsg.

- generalisierte Koordinaten und Zwangskräfte

$L(r_i, \dot r_i, t)$ $\quad i = 1, \dots, s+1$

holonome Zwangsbedingung $\quad g(r_1, \dots, r_{s+1}, t) = 0$

a.) s unabh. Koord. q_j, $j = 1, \dots, s$

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad \text{wobei} \quad g(r_i(q_1, \dots, q_s, t), t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow L(r_i, \dot r_i, t) = \tilde L(q_j, \dot q_j, t) \qquad q_j \text{ unabhängig}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial \tilde L}{\partial q_j} \quad \rightarrow \quad q_j(t)$$

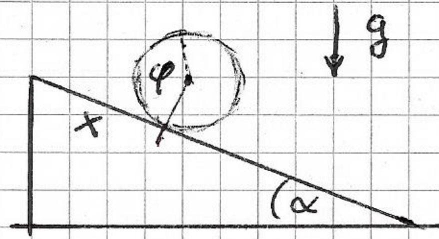
b.) $L(r_i, \dot r_i, t) - \lambda(t)\, g(r_i, t)$, $\quad s+1$ Koord., $g = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot r_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} \underbrace{- \lambda \frac{\partial g}{\partial r_i}}_{\text{Zwangskraft}} , \quad g(r_i, t) = 0$$

$$\rightarrow r_i(t), \; \lambda(t)$$

Beispiel :

Reifen
(Masse M entlang Umfang)



$$(r_1, r_2) = (x, \varphi), \quad g(x,\varphi) = x - R\varphi = 0$$

(Rollen ohne Gleiten)

$$q_1 = x$$

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + Mgx\sin\alpha$$

a.) Verwenden unabh. Koordinaten $(q_1 = x)$

$$r_i = r_i(q_j), \qquad x = x, \quad \varphi = \frac{x}{R}, \quad g(x, \varphi(x)) = x - x \equiv 0$$

$$L(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) = M\dot{x}^2 + Mgx\sin\alpha$$

$$\Rightarrow 2M\ddot{x} = Mg\sin\alpha \Rightarrow \ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{g\sin\alpha}{2R}$$

b.) Verwenden abh. Koord. (x, φ) und Lagrange-Multiplikator

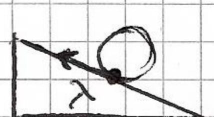
$$L - \lambda g = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + Mgx\sin\alpha - \lambda\cdot(x - R\varphi)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - \lambda \\ \left.\begin{array}{l} MR^2\ddot{\varphi} = \lambda R \\ x - R\varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M\ddot{x} = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{2}$$

$$\lambda = \frac{Mg\sin\alpha}{2}$$

Zwangskraft

$$\lambda = MR\ddot{\varphi}$$

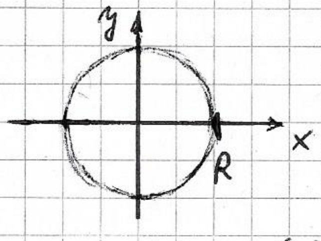


3. Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrie ≡ Invarianz unter Transformation

kontinuierlich:

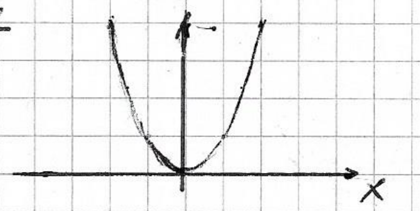
$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$



invariant unter
$$x \to x' = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y$$
$$y \to y' = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 - R^2 = 0$$

diskret:



$$f(x) = x^2$$

invariant unter $x \to x' = -x$

Symmetrien spielen eine zentrale Rolle in der Physik

Noethertheorem: Symmetrie → Erhaltungssatz

Mechanik: Betrachte abgeschlossenes System der Form

$$L = L(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^{\,2} - U(\vec{r}_a) \equiv T - U$$

generalisierte Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$

$$r_{aj} = r_{aj}(q_1, \ldots, q_s) \qquad a = 1, \ldots, N \qquad j = 1, 2, 3$$

$$\dot{r}_{aj} = \sum_k \frac{\partial r_{aj}}{\partial q_k} \dot{q}_k = f_1(q_i)\,\dot{q}_1 + \ldots + f_s(q_i)\,\dot{q}_s$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{s} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q)$$

o.B.d.A. $a_{ik} = a_{ki}$ $\qquad (a_{12} + a_{21})\, \dot{q}_1 \dot{q}_2$