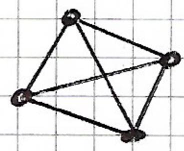
6. Bewegung des starren Körpers

6.1. Kinematik

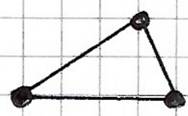
Starrer Körper: System von N Massenpunkten mit festen Abständen



Freiheitsgrade:

a.) Lage des starren Körpers eindeutig bestimmt durch Lage von 3 nicht kollinearen Punkten des Körpers.

Freiheitsgrade $= 3 \cdot 3 - \underset{\nearrow}{3} = \boxed{6}$

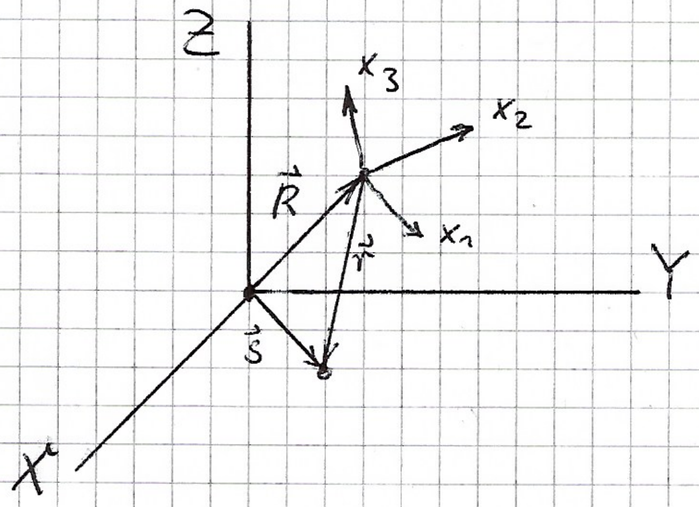


Bedingungen (Abstände konstant)

b.) Lage des Schwerpunkts: 3 Freiheitsgrade

+ Drehungen um 3 unabh. Achsen durch Schwerpunkt $\rightarrow$ $\boxed{6}$

Bezugssysteme



1. X, Y, Z

raumfest, in Ruhe

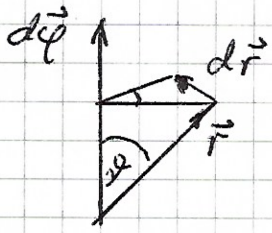
Inertialsystem $\boxed{IS}$

2. x_1, x_2, x_3 Körperfest, bewegt $\boxed{KS}$

i.allg. kein Inertialsystem

Ursprung in festem Punkt des Körpers, z.B. Schwerpunkt

- infinitesimale Drehung um Ursprung von KS (bez. IS)



$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \qquad dr_i = \varepsilon_{ijk}\, d\varphi_j\, r_k$$

$$|d\vec{r}| = |d\vec{\varphi}|\, r \sin\vartheta$$

- Verschiebung des Ursprungs von KS (bez. IS): $d\vec{R}$

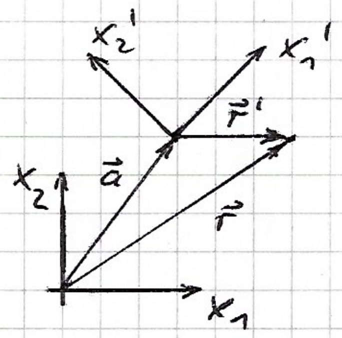
→ Gesamtverschiebung eines Punktes im Körper (bez. IS): $d\vec{s}$

$$ds_i = dR_i + \varepsilon_{ijk}\, d\varphi_j\, r_k$$

mit $\frac{ds_i}{dt} \equiv v_i$, $\frac{dR_i}{dt} \equiv V_i$, $\frac{d\varphi_i}{dt} \equiv \omega_i$ Winkelgeschwindigkeit

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_i = \underbrace{V_i}_{\text{Translation}} + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \omega_j\, r_k}_{\text{Rotation}}}$$

zweites körperfestes System KS'



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$$

Es gilt: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

genauso: $\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{V}' + \vec{\omega}' \times \vec{r}\,' = \\ &= \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \end{aligned}\right\} \forall\, \vec{r}\,'$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a} \qquad \boxed{\vec{\omega}\,' = \vec{\omega}}$$

- $\vec{\omega}$ unabh. von Wahl des körperfesten Systems

- Falls in einem Zeitpunkt $\vec{V} = 0$

⇒ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, Bewegung reine Rotation um Achse durch Ursprung von KS, $\parallel \vec{\omega}$:

<u>momentane Drehachse</u>

Kinetische Energie des starren Körpers

hier: Betrachtung im IS ; Ursprung von KS = Schwerpunkt

$$T = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^{\,2} \equiv \sum \frac{m}{2} \vec{v}^{\,2} = \sum \frac{m}{2} v_i^2$$

$$v_i^2 = v_i v_i = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$T = \sum \frac{m}{2} \left(V_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \right)^2 =$$

$$= \sum \left(\frac{m}{2} V_i^2 + m V_i \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k + \frac{m}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \varepsilon_{iln} \omega_l r_n \right)$$

$\sum m =: M$ Gesamtmasse

$\underbrace{\text{gleich } \forall \text{ Punkte}}_{\sim \sum m r_k = 0}$

$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{iln} = \delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}$

$\Rightarrow$

$$T = \frac{M}{2} V_i^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum m \left(r_k^2 \delta_{jl} - r_j r_l \right) \right]}_{=: J_{jl}} \omega_j \omega_l$$

<u>Trägheitstensor</u>

$\Rightarrow$

$$\boxed{T = \frac{M}{2} V_i^2 + \frac{1}{2} J_{ij} \omega_i \omega_j}$$

Kin. Energie der Translation, der Rotation

(quadratische Form in ω_i)

- Fall 1: Schwerpunkt im Ursprung von KS (siehe oben)

Fall 2: Ursprung von KS in Ruhe $\Rightarrow V_i = 0$ $\quad \boxed{T = \frac{1}{2} J_{ij} \omega_i \omega_j}$

- Matrixschreibweise

$$J = \sum m \cdot \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_2 r_1 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix}$$

- r_i $\overset{,\omega_i}{\downarrow}$ bezogen auf KS : $r_i = x_i$, J konstant

- J symmetrisch $\quad J_{ij} = J_{ji}$

- kontinuierlicher Körper $\quad \sum m \to \int d^3r\, \varrho(\vec{r})$

$$J_{ij} = \int d^3r\, \varrho(\vec{r})\, (r_k^2\, \delta_{ij} - r_i r_j)$$

- J additiv

- Achsen von KS lassen sich so wählen, dass J diagonal wird $\to$ <u>Hauptachsen</u>

orthogonale Matrix A $\quad \vec{r} \to \vec{r}\,' = A\vec{r}$ $\quad$ ($\hat{=}$ Drehung)

$$J \to J' = AJA^T = J_D = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$$

damit $T_{rot} = \frac{1}{2} J_{ij}\, \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2)$

J_1, J_2, J_3 : <u>Hauptträgheitsmomente</u>

- Ungleichung

$$J_1 + J_2 = \sum m (r_1^2 + r_2^2 + 2 r_3^2) \geq \sum m (r_1^2 + r_2^2) = J_3$$

- J_1, J_2, J_3 verschieden : unsymmetrischer Kreisel

$J_1 = J_2 \neq J_3$: symmetrischer Kreisel

$J_1 = J_2 = J_3$: Kugelkreisel